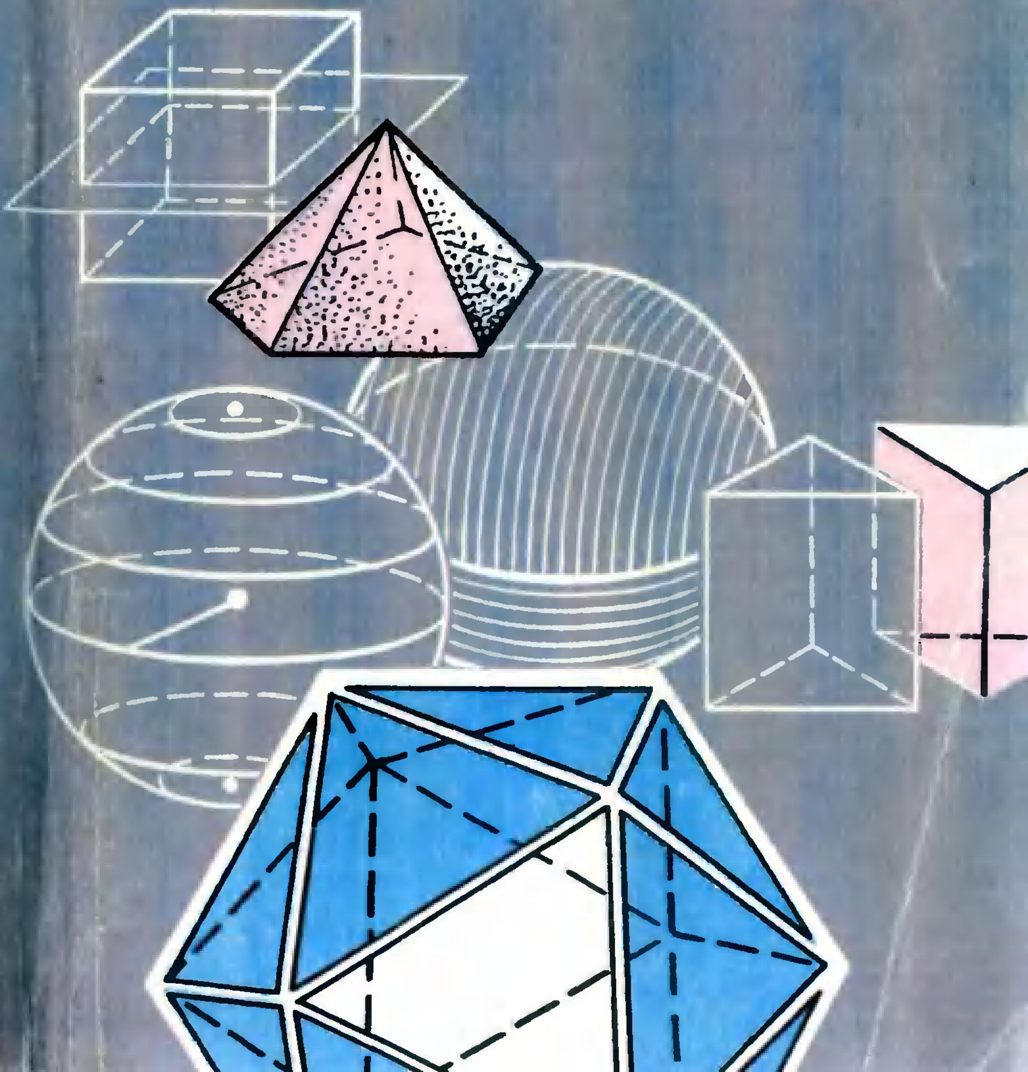
А.Д. АЛЕКСАНДРОВ
А.Л. ВЕРНЕР, В.И. РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ 7



А. Д. АЛЕКСАНДРОВ,
А. Л. ВЕРНЕР, В. И. РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ • 7

Экспериментальное
учебное пособие
для учащихся VII класса
средних
учебных заведений

МИРОС

МОСКВА 1994

Редактор — В. В. Произволов

Александров А. Д. и др.

Геометрия. Экспериментальное учебное пособие для учащихся VII класса средних учебных заведений/ А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— М.: МИРОС, 1994.— 200 с.: ил.

ISBN 5-7084-0045-5

Учебное пособие обеспечивает дифференцированное преподавание геометрии: последовательно-параллельное изложение материала ведется на трех уровнях — наглядном, прикладном и логическом. Пособие развивает традиции, которые сложились в серии учебных книг по геометрии авторского коллектива, возглавляемого академиком А. Д. Александровым. Не назидание, а беседа — таков авторский стиль данного курса. Большой набор задач по всем темам курса (фактически — задачник в учебнике) поможет учителю организовать практическую работу с учащимися.

Александр Данилович Александров
Алексей Леонидович Вернер
Валерий Идельевич Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ

Экспериментальное учебное пособие
для учащихся VII класса
средних учебных заведений

Зав. редакционно-издательским отделом *Т. И. Балашова*
Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
Технический редактор *И. В. Пронина*
Корректор *Р. И. Андреева*
Оригинал-макет сверстал в Компьютерном центре МИРОСа *С. Н. Розов*

Изд. № Ф30 (03)
ISBN 5-7084-0045-5

Предисловие

Настоящий учебник развивает концептуальный подход, который уже реализован в серии учебников геометрии авторского коллектива, возглавляемого А. Д. Александровым. Исходя из этой концепции, авторы рассматривают геометрию в соединении ее классических и современных идей, как необходимый элемент общей культуры человечества. Учебник рассчитан на дифференцированное изучение предмета и содержит три уровня: *гуманитарный* (общеобразовательный), расширяющий его *прикладной* и *логический* (*проблемный*), углубляющий первый уровень освоения геометрических знаний.

Помимо теоретического материала, учебник включает в себя задачник, составленный В. И. Рыжиком.

В помощь учителям, работающим со школьниками по данному учебнику, подготовлены методические материалы, вышедшие в МИРОСе отдельной книгой под названием «Строгий мир геометрии». Такой учебно-методический комплект, несомненно, обогатит библиотечку изданий, посвященных геометрии как учебной дисциплине.

Работа над учебником началась в 1989 г. по заданию президиума АПН — после победы проекта учебника на конкурсе научно-исследовательских проектов, проведенном АПН. Экспериментальная апробация его ведется с 1990 г. в трех школах Санкт-Петербурга учителями Л. П. Евстафьевой, А. А. Окуневым и О. А. Шептовицкой. Их предложения и замечания учтены авторами. Например, в учебнике часть материала под заголовками «Вопросы, вопросы, вопросы...» и «Размышления ...» предложена А. А. Окуневым, а часть им и написана. Автором комментариев является Т. Г. Ходот.

К книге для учителя «Строгий мир геометрии» А. А. Окунев написал раздел «Методические рекомендации», а Т. Г. Ходот в соавторстве с А. Л. Вернером составлены специальные методические рекомендации к изучению темы «Пропедевтика стереометрии»; наконец, дидактические материалы подготовлены Л. П. Евстафьевой и О. А. Шептовицкой.

Введение

Откуда пошла геометрия. *Гео*метрия... Откуда взялось это слово? Что оно означает? Попробуем разгадать его смысл. Ведь вам постоянно встречаются похожие слова: *гео*графия, *гео*логия, *гео*дезия... А есть еще *гео*ботаника и т. п.

Это все названия различных наук или разделов наук. О смысле слова «география» вам уже рассказали. А чтобы узнать, что означают другие слова, заглянем в один из энциклопедических словарей. Там можно прочесть, что геология — это наука о составе, строении и истории Земли и земной коры; геодезия — наука об определении формы и размеров Земли; геоботаника — наука о растительном покрове Земли; геоакустика — наука о распространении упругих волн в земной коре.

В переводе с греческого «гео» означает «Земля». Следовательно, если название науки начинается с «гео», то это одна из наук, изучающих Землю. Ну а слово «метр» вам объяснять не надо: все вы знаете, что метр — это единица измерения длины (от греческого слова «метрео» — «измеряю»).

И получается, что геометрия в переводе с греческого означает «измерение Земли» или «землемерие». Какова же история ее возникновения? Такой вопрос задавали еще в Древней Греции и отвечали на него так: «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении Земли. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом рассмотрения и наконец делается достоянием разума». Эти замечательные слова приписывают греческому ученому Евдему Родосскому, жившему в IV в. до н. э.

А как на этот вопрос отвечают теперь? Заглянем на этот раз в «Энциклопедический словарь юного математика». Там написано: «Геометрия — одна из наиболее древних математических наук. Первые геометрические факты мы находим в вавилонских клинописных таблицах и египетских папирусах

(III тысячелетие до н. э.), а также в других источниках. Название науки «геометрия» — древнегреческого происхождения».

Что же мы с вами уже узнали про геометрию? Что это очень древняя математическая наука. Она зародилась в Древнем Египте пять-шесть тысяч лет назад и первоначально была набором правил, которые помогали измерять площади, объемы, решать задачи, возникавшие при сооружении оросительных каналов, грандиозных храмов, пирамид и т.п. Египетские пирамиды насчитывают около 4800 лет, а их строительство требовало достаточно точных геометрических расчетов. Но особенно важной была задача распределения земельных участков.

В Египте плодородная земля тянется узкой полосой в долине Нила, а за ее пределами простирается пустыня. Пригодной для земледелия земли было мало, и каждый ее клочок представлял большую ценность. Поэтому, когда ежегодно разливы Нила смывали границы участков, нужно было восстанавливать их как можно точнее. Этим занимались специальные землемеры, которые, можно сказать, были первыми геометрами.

Накопленные египтянами обширные знания о свойствах фигур заимствовали греки (в период VII—V вв. до н. э.). Они называли египетских геометров-землемеров «гарпедонаптами», т. е. «веревковязателями». Это показывает, что в своих геометрических построениях и измерениях египтяне пользовались веревками. И мы будем иногда говорить о применении веревок для построения и сравнения фигур. Если в Древнем Египте геометрия была сугубо прикладной наукой, то в Древней Греции она стала математической теорией. И имена знаменитых греков будут постоянно встречаться вам в курсе геометрии. Об одном из них — Евклиде мы скажем уже сейчас.

Евклид жил в Александрии около 300 г. до н.э., был современником царя Птоломея I и учеником Платона. Славу Евклиду создал его собирательный труд «Начала». Величайшая заслуга Евклида в том, что он подвел итог построению геометрии и придал ее изложению столь совершенную форму, что на две тысячи лет «Начала» стали основным руководством по геометрии.

Наш учебник во многом следует Евклиду, его «Начала» составляют значительную часть всего школьного курса геометрии. И ту геометрию, которую мы будем изучать, сейчас называют евклидовой.

Геометрические фигуры. Вам уже хорошо известны многие **геометрические фигуры**: отрезок, луч, прямая, угол, окружность, круг, треугольник, квадрат (рис. 1) и др. Все это *плоские* фигуры — они укладываются на плоскости. Известны и *пространственные* геометрические фигуры: куб, прямоугольный параллелепипед, шар, пирамиды (рис. 2).

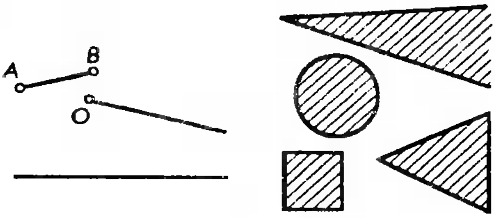


Рис. 1

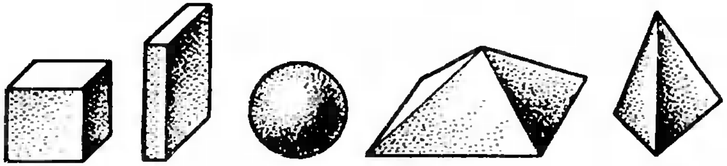


Рис. 2

Любой предмет окружающего нас пространства можно рассматривать как геометрическую фигуру, если принимать во внимание только его форму и размеры. Например, силуэт головы может рассматриваться как плоская фигура, а скульптура — как пространственная (рис. 3). При этом все остальные свойства предметов: массу, цвет, твердость и т. п. — оставляют без внимания, от всего этого отвлекаются. (Например, изучая форму шара, в геометрии не интересуются, будет ли этот шар футбольным мячом, апельсином или глобусом.)

Возникновение геометрических знаний связано с практической деятельностью людей. Это отразилось и в названии многих геометрических фигур. Например, слово «трапеция» происходит от греческого слова «trapezion» — «столик» (рис. 4) (отсюда слово «трапеза» и другие родственные слова). Термин «линия» возник от латинского «linum» — лен, льняная нить.

В геометрии изучают любые фигуры, но мы будем заниматься только простыми фигурами. Самая простая фигура — **точка**.

Рис. 3

Рис. 4

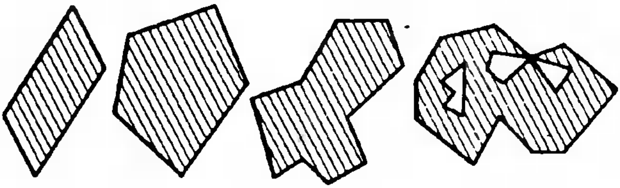


Рис. 5

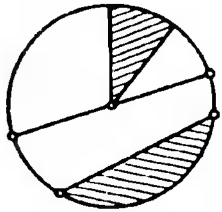


Рис. 6

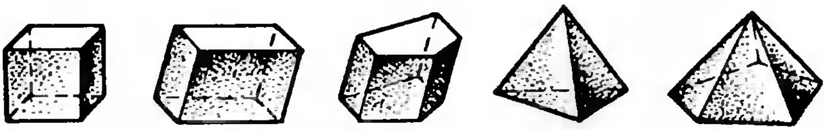


Рис. 7

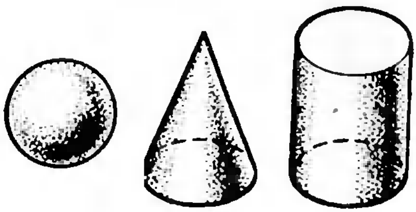


Рис. 8

Из плоских фигур мы будем изучать **многоугольники** (рис. 5), **круг и его части** (рис. 6), а из пространственных фигур — **многогранники** — *призмы* и *пирамиды* (рис. 7), *шар, конус, цилиндр* (рис. 8).

Граница многоугольника состоит из отрезков. На его границе лежат *вершины* и *стороны* многоугольника. Граница многогранника состоит из многоугольников. На границе многогранника лежат *вершины*, *ребра* и *грани*.

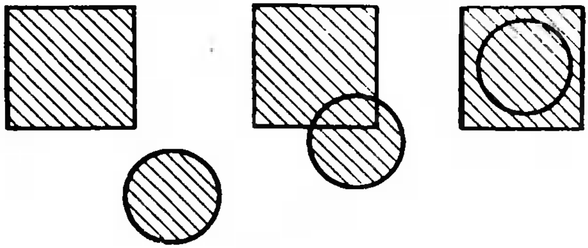


Рис. 9

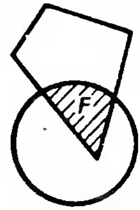


Рис. 10

Объединение фигур — тоже фигура. Так, на рис. 9 изображены фигуры, которые получаются объединением круга и квадрата (для различных случаев их взаимного расположения).

Общая часть двух фигур, или, как говорят, **пересечение** двух фигур,— тоже фигура, как, например, на рис. 10 фигура F.

Часть фигуры — тоже фигура.

В геометрии отвлекаются не только от свойств предметов, кроме формы и размеров, но частично и от самих размеров. Точки мыслятся как не имеющие никаких размеров; отрезки и линии — как не имеющие ни ширины, ни толщины; плоскость — как не имеющая толщины. (Обратите внимание на эти удивительные фразы. Они достойны того, чтобы вы поразмышляли над ними.)

Можно сказать, что геометрия — это наука о фигурах, а **фигура — это мысленный образ предмета, в котором сохраняются только форма и размеры, и только они принимаются во внимание.** Так, отрезок — это мысленный образ тончайшей натянутой нити.

Первые задачи геометрии. Одна из первых задач геометрии состоит в *сравнении фигур* (на практике — в сравнении форм и размеров предметов). Сравнивая плоские предметы, выясняя, одинаковые ли они по длине, ширине, форме, часто их накладывают друг на друга. Вспомните, когда вы покупаете новую пару обуви, то контролер прикладывает друг к другу подошвами ботинки или туфли отобранной вами пары, проверяя, одинаковы ли они.

Но этот способ далеко не всегда можно применить для сравнения. Например, нельзя наложить друг на друга два участка земли, неудобно прикладывать друг к другу прямоугольные крышки столов или стекла больших витрин. Знание геометрии подскажет другой простой способ сравнения, причем можно обойтись без рулеток и мерных линеек, достаточно иметь одну бечевку. К примеру, чтобы убедиться, что крышки столов или стекла витрин одинаковы, достаточно бечевкой сравнить длины четырех сторон и одной диагонали (*диагональ* — это отрезок, соединяющий противоположные углы, рис. 11). На практике так и поступают. Этим же способом можно сравнивать участки земли. Геометрия же обосновывает этот способ.

Итак, одна из первых задач геометрии состоит в сравнении фигур путем сравнения в них отдельных размеров, т. е. в выяснении того, какие размеры достаточно знать, чтобы судить, равны фигуры или нет.

Сравнение фигур включает также *измерение геометрических величин*, таких, как длина, величина угла, площадь. Но чтобы обосновать точные измерения, точное изготовление измерительных инструментов, начиная с простой линейки, нужна геометрия. Любой же способ создания инструментов начинается с построения разнообразных геометрических фигур.

А как построить фигуру *с нужными свойствами* — это искусство, которому учит геометрия. Она указывает те несколько свойств фигуры, которые обязательно надо учесть, чтобы получить желаемый результат. Например, еще в Древнем Египте знали, что построить прямой угол можно, построив треугольник со сторонами 3, 4, 5 — «египетский треугольник». Почему один из углов этого треугольника прямой? Какие свойства фигуры надо обеспечить, чтобы оказались обеспеченными и другие ее свойства? Это типичные вопросы геометрии.

Итак, задача геометрии еще и в том, чтобы давать *точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами*. Например, для плотника или столяра, проверяющего, будет ли крышка стола прямоугольником, эта задача решается так. Он сравнивает с помощью бечевки противоположные ее края, а также диагонали (рис. 12, *а*). Если противоположные края оказываются одинаковой длины, а длины диагоналей тоже одинаковы, то крышка стола прямоугольная — все ее углы прямые.

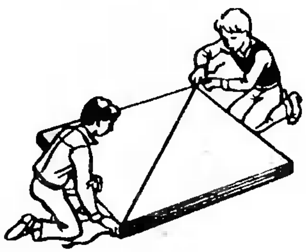
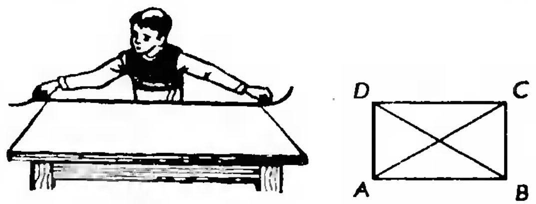


Рис. 11



а) *б)*

Рис. 12

В самой же геометрии речь идет не о плитах и крышках столов, а о фигурах, в данном случае о четырехугольниках. Если у четырехугольника противоположные стороны равны и диагонали равны, то он прямоугольник (рис. 12, *б*).

Это утверждение мы докажем позднее. Оно вовсе не очевидно и замечательно тем, что из сравнения отрезков получается вывод об углах.

Среди задач геометрии — нахождение расстояний до недоступных предметов, определение их размеров и форм. Как определить ширину реки, не пересекая ее? Как может артиллерист определить расстояние до цели? Ведь она ему недоступна! Как найти высоту дерева, к которому даже и подойти нельзя? Как определяют издали высоту гор? Как впервые нашли расстояние до Луны и определили ее размеры?

Разделы геометрии. Современная геометрия — это могучее дерево с широкой кроной и многочисленными ветвями. И это дерево и сейчас продолжает расти, появляются новые ветви, новые разделы геометрии. А корнями этого дерева является элементарная геометрия, та, которая изложена в «Началах» Евклида. Именно эту, евклидову геометрию и изучают в школе.

Она традиционно делится на два раздела — **планиметрию** и **стереометрию**. Планиметрия изучает фигуры на плоскости («планум» в переводе с латинского означает «плоскость»). Стереометрия же изучает фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого — «пространственный»).

Планиметрию подробно изучают в VII—IX классах, стереометрию — в X—XI. Но, изучая планиметрию, мы часто будем знакомиться и с пространственными фигурами.

Напомним, что слово «геометрия» означает «землемерие». Ведь Земля по форме близка к шару, а ее поверхность — к сфере. И уже в древности изучали геометрию сферы — **сферическую геометрию**. Правда, изучали ее не на земной сфере, а на небесной — развитие сферической геометрии побуждалось задачами астрономии. Сферическая геометрия изучает фигуры на сфере. При этом на сфере, как и на плоскости, есть, например, треугольники, окружности и т. п. (рис. 13).

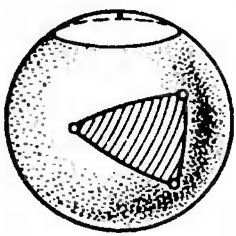


Рис. 13

Сферическая геометрия — это первая из неевклидовых геометрий. Но когда говорят «неевклидова геометрия», то, конечно, обычно имеют в виду **геометрию Лобачевского**, о которой мы начнем рассказ во второй главе.

Глава 1

Начала геометрии

Итак, мы приступаем к изучению геометрии. Особенность геометрии, выделяющая ее из других наук, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядными представлениями. Геометрия и есть соединение живого воображения и строгой логики.

Логика в геометрии и в математике вообще играет ту же роль, что эксперимент в физике. И в математике, и в физике у вас может возникнуть идея, которая кажется вам правдоподобной. Но в физике лучший способ убедиться в ее правильности — пойти в лабораторию и попытаться ее проверить, а в математике — еще немного поразмышлять и попытаться ее доказать.

Первая глава учебника как бы открывает долгий путь в прекрасную, стройную, строгую, точную, пронизанную логикой науку — геометрию. Эта глава удивит вас своей простотой и даже, на первый взгляд, отсутствием значительной информации. Изучаться в ней будут давно знакомые вам самые простые геометрические фигуры: точки, отрезки, лучи, прямые, углы. Но теперь все ваши знания будут приведены в систему. (Задача поистине достойная самого Евклида: вспомните, считается, что величайшей заслугой Евклида являются не столько его собственные научные исследования, сколько то, что он придал изложению геометрии столь совершенную форму.)

Мы поставим перед собой такие задачи:

во-первых, подробно объяснить, что́ мы понимаем под каждым из перечисленных выше геометрических объектов;

во-вторых, уточнить, как сравниваются отрезки, как сравниваются углы;

в-третьих, рассказать о действиях над отрезками и действиях над углами, о сложении и вычитании отрезков и углов;

и наконец, *в-четвертых*, выяснить, как измеряются отрезки и углы.

§ 1. ОТРЕЗКИ, ЛУЧИ, ПРЯМЫЕ

1.1. Отрезки. Представьте себе, как два землемера в Древнем Египте при восстановлении границ земельных участков втыкали в землю колышки и протягивали между ними веревку (рис. 14). Места, куда воткнуты колышки, представляют собой точки. Размеры их практически не играют роли; однако чем тоньше колышки, тем точнее построение. Натянутая веревка представляет собой прямолинейный отрезок. Толщина ее практически не играет роли — важна только длина. Так приходим к понятию **точки** без всяких размеров и **отрезка** без толщины и ширины. А протягивание веревки между двумя колышками приводит нас к такому основному утверждению геометрии:

Любые две точки можно соединить отрезком, и притом только одним.

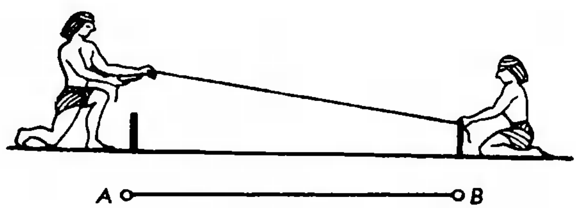


Рис. 14

Как вы знаете, чтобы начертить отрезок на бумаге (или на доске), пользуются линейкой (даже без делений).

Отрезок, соединяющий точки A и B, обозначают AB или BA, а сами точки A и B называют **концами** этого отрезка.

О точках отрезка, не являющихся его концами, говорят, что они лежат **внутри отрезка**. Точки, лежащие внутри отрезка, называют также его **внутренними точками**.

Отрезки можно обозначать и так: a, b, c...

Если точка B лежит внутри отрезка AC, то она делит его на отрезки AB и BC (рис. 15). Еще говорят, что точка B разбивает отрезок AC на отрезки AB и BC. Отрезок AC в этом случае будет *продолжением отрезка AB за его конец B*. Точно так же отрезок CA будет продолжением отрезка CB за точку B.

Обратите внимание, что отрезок, полученный продолжением данного отрезка, содержит его.

Ясно, что любой отрезок можно продолжить за каждый из его концов. Объединение любых двух отрезков, полученных продолжением данного отрезка, снова является отрезком (рис. 16). Это значит, что любой отрезок AB всегда можно продолжить за точку B, т. е. построить такой отрезок AM, что AB будет частью AM (рис. 16, *а*).

Рис. 15

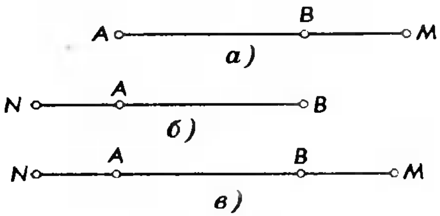


Рис. 16

Точно так же отрезок AB можно продолжить за точку A и построить такой отрезок BN, что AB будет частью BN (рис.16, *б*). А вместе объединение отрезков AM и BN дает отрезок MN (рис. 16, *в*).

Комментарий

Интересно, что в русском языке слово «точка» — однокоренное со словами «точность», «точить» и др. Заметим также, что в английской системе мер есть мера длины, которая называется «точка» (точка — это 0,1 от линии, а линия — это 0,1 дюйма, равного примерно 25 мм).

Понять фразу: «Точка — это фигура, не имеющая ни длины, ни толщины» — не просто. Мы представляем точку как самую маленькую геометрическую фигуру. Попробуем ее нарисовать мелом на доске. Понятно, что всегда можно уменьшить то, что мы нарисовали, т. е. получить еще более мелкую фигуру. Тогда попробуем нарисовать точку карандашом в тетради. Конечно, она получилась меньше, чем на доске, но ее можно еще уменьшить, получше заострив карандаш. Как бы мы ни старались, мы увидим, разглядывая нашу «точку» в лупу или в микроскоп, что она все еще не самая маленькая из всех возможных. Становится понятно, что нарисовать такую фигуру, которая не имеет ни длины, ни толщины, невозможно, и мы лишь условно обозначаем карандашом или мелом место, где находится точка.

1.2. Конструкции из отрезков. На практике многие постройки как бы сделаны из отрезков. Например, забор из штакетника (рис. 17, *а*), фермы моста (рис. 17, *б*), спортивные снаряды (рис. 17, *в*), каркасы (рис. 17, *г*) и т. п.

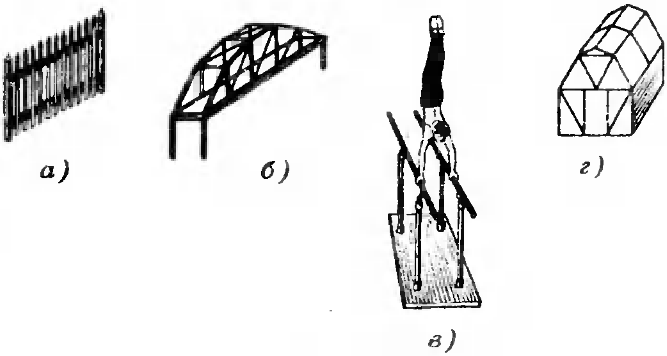


Рис. 17

И в геометрии, объединяя отрезки, получают различные фигуры, как плоские, так и пространственные. Самые простые из них — это **ломаные линии,** или просто **ломаные** (рис. 18). Ломаную получают последовательно прикладывая отрезки друг за другом: один из концов первого отрезка служит концом второго, другой конец второго служит концом третьего и т.д. При этом соседние отрезки ломаной не лежат на одной прямой.

Ломаную обозначают и называют по последовательным концам ее отрезков. Например, на рис. 18, *а* изображена ломаная *ABCDEFG*. Отрезки, составляющие ломаную, называются ее *звеньями*. Если концы крайних звеньев совпадают, то ломаная называется *замкнутой* (рис. 19). Самая простая замкнутая ломаная состоит из трех отрезков. Она ограничивает треугольник.

Ломаная может быть достаточно сложной фигурой. Из всех ломаных выделяют *простые* — те, у которых звенья не пересекаются и не соприкасаются. Например, на рис. 18, *в, г, д* изображены ломаные *ABCDEFG*, не являющиеся простыми, а на рис. 18, *а, б* изображены простые ломаные.

Теперь давайте представим себе, что у нас есть три равные (одинаковые) рейки (три равных отрезка), из них можно

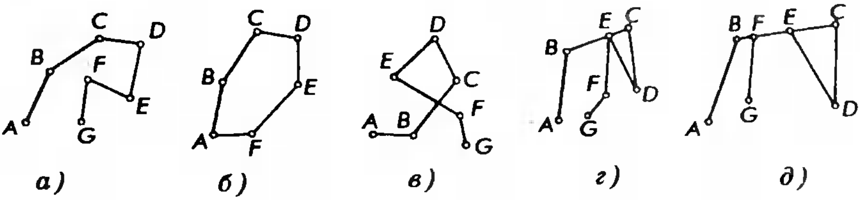


Рис. 18

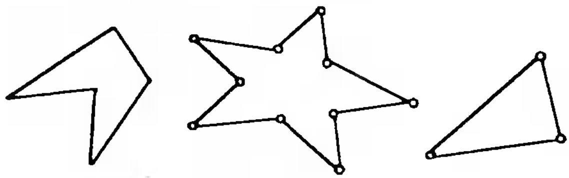


Рис. 19

построить один треугольник. А из шести? Ясно, что из шести реек можно построить два треугольника. А нельзя ли больше? Подумайте! Оказывается, что можно, но их надо расположить в пространстве так, как изображено на рис. 20. Ограниченные рейками четыре треугольника — это грани треугольной пирамиды. Короче треугольную пирамиду называют *тетраэдром.* А сколько можно составить треугольников из 12 реек? Подумайте!

1.3. Лучи и прямые. Точки и отрезки — самые основные фигуры. Используя их, мы будем получать более сложные фигуры. Лучи и прямые получаются при неограниченных продолжениях отрезка: луч — в одну сторону, прямая — в обе.

Слово «луч» вам, скорее всего, встречалось, когда вы говорили «солнечный луч» или «луч света» (рис. 21, *а*).

Но можно себе представить луч и так.

Возьмите лист бумаги, отметьте на нем точку *A* и проведите (по линейке) какой-нибудь отрезок *AB* (рис. 21, *б*). Теперь

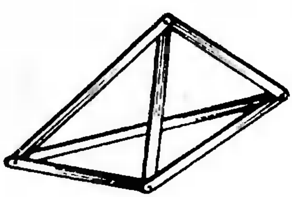


Рис. 20

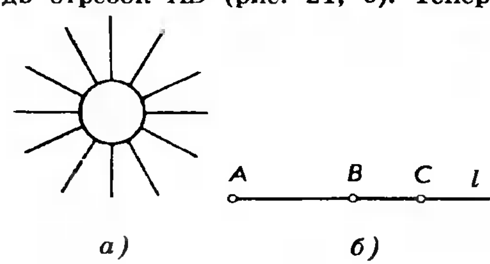


Рис. 21

продолжите его (тоже по линейке) за точку B. Полученный отрезок обозначьте AC. Если вы будете и дальше мысленно неограниченно продолжать его в том же направлении, то в результате получите фигуру, которую называют лучом с началом в точке A. Обозначают луч его началом и еще какой-нибудь одной из его точек: луч AB (или, что то же самое, луч AC). Можно луч обозначать и одной буквой: например, луч l.

Таким образом, можно сказать, что **луч AB получается неограниченным продолжением отрезка AB за точку B.**

Когда мы говорим: «неограниченно продолжить», то имеем в виду, что, продолжая отрезок, мы нигде не остановимся.

Если же мы мысленно будем продолжать отрезок за оба его конца, то получим фигуру, которая называется **прямой** (рис. 22).

Ясно, что **через каждые две точки проходит прямая**. Убедимся в этом.

Сначала соединим отрезком две данные точки, а затем неограниченно продолжим его в обе стороны. В результате получим прямую, проходящую через две данные точки.

Такая прямая только одна. Другими словами: **прямые, имеющие две данные точки, совпадают.**

В самом деле, прямые, имеющие две общие точки, имеют общий отрезок, а тогда обе они получаются продолжением одного и того же отрезка, т. е. совпадают.

Поэтому **если две различные прямые a и b имеют общую точку O, то другой общей точки у них больше нет** (рис. 23).

О таких прямых говорят, что они *пересекаются* в точке O.

Одно из важнейших свойств прямой, лежащей на плоскости, состоит в том, что **прямая разбивает плоскость на две полуплоскости** (рис. 24, *а*). В пространстве таким свойством прямая не обладает. Зато аналогичным свойством в пространстве обладает плоскость: **плоскость разбивает пространство на два полупространства** (рис. 24, *б*).

Рис. 22

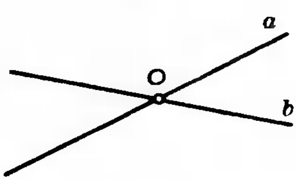
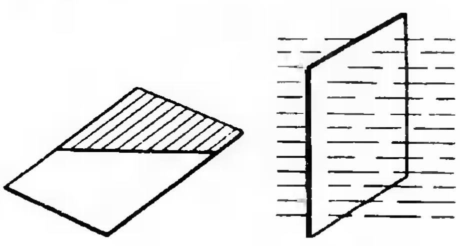


Рис. 23



а)

б)

Рис. 24

Комментарий

Мы познакомились с тремя основными геометрическими фигурами: точкой, прямой, плоскостью. Интересно отметить, что подобно тому как прямая (и вообще линия) получается непрерывным перемещением точки, так и при перемещении прямой в пространстве можно получить разнообразные поверхности, в том числе и плоскость.

Представим себе две пересекающиеся прямые, одна из которых неподвижна, а другая перемещается параллельно самой себе, скользя все время по первой прямой. Понятно, что подвижная прямая при своем движении образует поверхность. Это и есть плоскость (рис. 25).

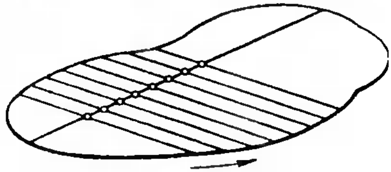


Рис. 25

Подобно тому как точка, которая не имеет ни длины, ни ширины, ни толщины, образует при своем движении прямую, которая имеет протяженность, хотя по-прежнему не имеет ни ширины, ни толщины, так и прямая при своем движении образует плоскость, которая имеет теперь протяженность по двум направлениям, но все еще не имеет толщины. Говорят, что прямая *одномерна*, а плоскость — *двумерна*.

Интересно задуматься и над таким вопросом: что значит — прямая разбивает плоскость?

Говорят, что фигура разбивает плоскость на части, если из одной части плоскости нельзя непрерывно перейти в другую часть, не пересекая эту фигуру. Нарисуйте различные фигуры на плоскости, которые не разбивают плоскость на части, а также такие фигуры, которые разбивают плоскость на две, три и более частей.

1.4. Вопросы, вопросы, вопросы ... Аксиомы. В предыдущих пунктах мы повторили хорошо известные вам сведения об отрезках, лучах и прямых. Вряд ли сказанное там вызвало у вас вопросы. Да и при выполнении большинства заданий самостоятельных работ, по-видимому, затруднений у вас не возникло. Но для геометра уже в этом простом материале таится много отнюдь не простых вопросов. Давайте более требовательно посмотрим на все сказанное нами и на уже выполненные вами построения.

Например, *почему любой отрезок можно продолжить за каждый из его концов? Что значит «продолжить»? Почему при продолжении отрезка снова получится отрезок?*

Как ответить на эти вопросы?

Говоря во введении о задачах геометрии, мы сказали, что одна из первых ее задач — дать точно обоснованные правила для построения фигур указанных форм и размеров. Но для того чтобы выводить эти правила, нужны четкие исходные положения. И в ответах на поставленные нами вопросы содержатся именно такие исходные основные правила для построения фигур. Сформулируем их.

Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов. Результатом продолжения отрезка является отрезок.

Вряд ли кто-нибудь подвергнет сомнению истинность этих правил, как и откажется признать тот факт, что каждые две точки можно соединить отрезком, и притом только одним. Практическая деятельность людей ежедневно и многократно подтверждает эти истины. Вам, пожалуй, никогда не пришло бы в голову формулировать их словами, не говоря уж о том, чтобы задуматься, почему же они верны. Но дело в том, что мы вслед за Евклидом собираемся излагать в этом учебнике геометрические факты таким образом, чтобы из нескольких простых начальных утверждений получить затем более сложные. Мы увидим, что все геометрические факты можно вывести из небольшого числа простых и очевидных утверждений. Эти утверждения, как и утверждения о простейших построениях, называют **аксиомами**.

Само слово «аксиома» по происхождению греческое и означает в переводе «достойное признания». В обычной речи аксиомой и называют утверждение, «достойное признания» ввиду его общепризнанности, очевидности, несомненности.

Говорят, например, о моральных аксиомах, таких, как «не делай подлостей». Словом, в обычном понимании аксиома — это нечто безусловное. К аксиомам относят не только простейшие построения, но и другие несомненные утверждения, в том числе утверждение о том, что **два отрезка, равные третьему отрезку, равны друг другу**.

Аксиом в геометрии немного. Они берутся из практики и наблюдения и, как уже подчеркивалось, они наглядны и очевидны. Все дальнейшие утверждения геометрии получают путем рассуждений. Такие рассуждения называют **доказательствами**. В результате доказательства становится ясным, что высказанное утверждение верно.

И это делает геометрию непохожей на такие науки, как, скажем, биология. Всю биологию или даже любую ее часть невозможно базировать на немногих фактах, полученных из наблюдений. Чтобы получить тысячи других фактов, которые необходимо знать, нам пришлось бы продолжать экспериментировать, исследуя или наблюдая в природе те или иные растения, тех или иных животных. Лаборатория же геометра — это его голова: в ней выстраиваются логические цепи, исходным пунктом для которых служат очевидные исходные положения — аксиомы.

Как сказал великий английский ученый Исаак Ньютон (1643—1727), **геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает.**

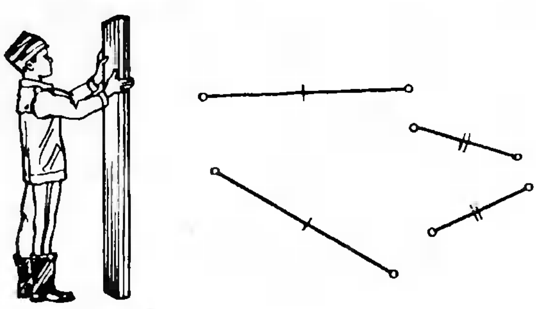
Например, мы уже доказали, что через каждые две точки проходит прямая.

1.5. Равенство и сравнение отрезков. Сравнивая длины двух предметов, их часто прикладывают друг к другу или кладут один на другой (рис. 26, *а*).

Отвлекаясь от толщины и других свойств таких предметов, представляем их себе как отрезки и говорим: «Два отрезка равны, если один из них можно наложить на другой так, чтобы они совпали».

На рисунках равные отрезки отмечаются обычно одинаковым числом поперечных черточек (рис. 26, *б*).

Но не всегда предметы можно сравнивать, прикладывая их друг к другу. Невозможно, например, приложить друг к другу два края одного стола. Что делать в этом случае? Их можно сравнить с третьим предметом, но можно обойтись даже веревкой. И если окажется, что длины двух предметов равны длине третьего предмета, то их длины равны. Перей-



а) *б)*

Рис. 26

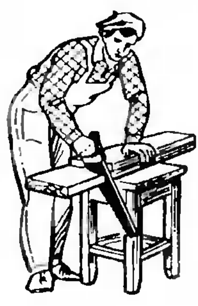


Рис. 27

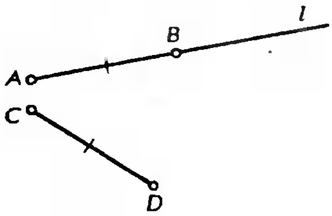


Рис. 28

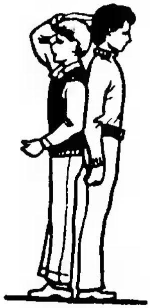


Рис. 29

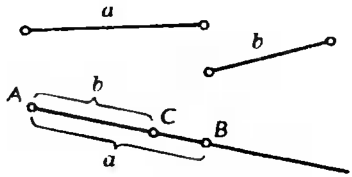


Рис. 30

дем от предметов к отрезкам и выскажем такое их свойство: **два отрезка, равные третьему, равны**. Как уже говорилось, это утверждение также относят к аксиомам.

Как получить отрезки, равные данному? Такую задачу часто приходится решать для реальных предметов, например при заготовке одинаковых досок и т. п.

Во всех таких случаях от более длинных предметов отпиливаются, отрезаются предметы требуемой длины (рис. 27). А для этого к длинному предмету (например, к доске) прикладывают предмет нужной длины и смотрят, чтобы их начала совпали.

Если от предметов снова обратимся к отрезкам, то придем к следующему построению равных отрезков. Пусть задан луч l с началом A и отрезок CD. На луче l от его начала — точки A можно отложить отрезок AB, равный отрезку CD (рис. 28). Ясно, что такой отрезок только один. Итак, сформулируем еще одну аксиому: **на каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.**

Сравнивают же два отрезка a и b примерно так же, как вы меряетесь ростом (рис. 29). Откладывают равные им отрезки на одном и том же луче и смотрят, как будут расположены их концы (рис. 30). Так как $AB > AC$, то $a > b$.

Напомним еще, что **середина отрезка** — это такая точка отрезка, которая делит его пополам, т. е. на два равных отрезка.

1.6. Действия с отрезками. На практике постоянно приходится «складывать отрезки», например, когда кладут рельсы железной дороги, сваривают трубы газопровода и т. п. (рис. 31). Такие реальные «отрезки» последовательно прикладывают друг к другу, составляя из них один «отрезок».

Соответственно, в теории отрезки складывают так же, последовательно откладывая их на одном луче (рис. 32).

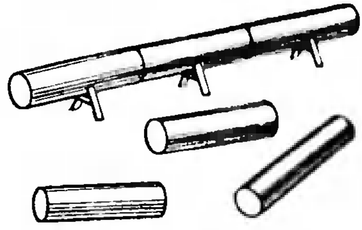


Рис. 31

При сложении отрезков применяют те же термины, что и при сложении чисел («слагаемые», «сумма»), и те же обозначения: например, $AC = AB + BC$ или $c = a + b$ (рис. 33).

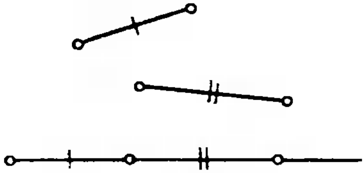


Рис. 32

Часто приходится складывать равные отрезки. Например, если отрезок $b = a + a + a$, то пишут $b = 3a$ (рис. 34).

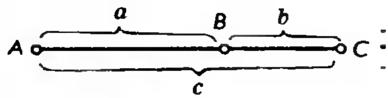


Рис. 33

Отрезки, как и числа, можно вычитать (рис. 35). Понятно: для того чтобы отрезок a можно было вычесть из отрезка b, надо, чтобы a можно было отложить на b, т. е. чтобы отрезок a был меньше отрезка b.

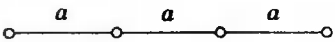


Рис. 34

Наконец, отрезки можно делить на равные части. Посмотрите на вашу линейку с делениями: она разделена на равные отрезки. Например, линейка в 25 см разделена на 25 равных отрезков длиной в 1 см каждый.

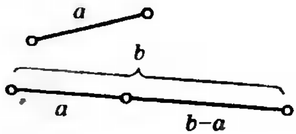


Рис. 35

1.7. Длина отрезка. Длина отрезка — первая и самая важная из геометрических величин. Она характеризует его протяженность. Измерять длину постоянно приходится в практике. Длина используется при вычислении других геометрических величин — площадей, объемов, величин углов. Например, зная длины сторон прямоугольника, можно вычислить его площадь.

Геометрические величины характеризуют форму и размеры фигур. Измерение геометрических величин — одна из важнейших задач геометрии.

Как вы знаете, для измерения длины сначала надо выбрать единичный отрезок, например 1 см, 1 м, 1 км и т. д. За основную единицу длины в физике, технике и в обыденной жизни принят метр (вообще-то говоря, за единичный отрезок можно взять любой отрезок).

Например, если отрезок (единичный) в 1 см укладывается в отрезке AB 6 раз, то пишем $AB = 6$ см. Тогда говорят, что численное значение длины отрезка AB при выбранной единице измерения равно 6. Если же в отрезке AB 6 раз уложился 1 см и 3 раза — его десятая доля, то в этом случае численное значение длины отрезка AB равно 6,3 см и пишут: $AB = 6{,}3$ см.

Измеряя длину отрезков, опираются на два основных свойства длины:

1. Длины равных отрезков равны.

2. При сложении отрезков их длины складываются.

После того как выбран единичный отрезок, длина каждого отрезка выражается положительным числом. Это число называется **численным значением длины.**

Договоримся, что в дальнейшем под длиной отрезка мы будем подразумевать ее численное значение.

1.8. Вопросы, вопросы, вопросы... Измерение длин. Зададим сначала два вопроса:

1. *Как, имея измерительный инструмент (например, метровую линейку с делением), найти численное значение длины данного отрезка (к примеру, длину рейки)?*

2. *Как можно сделать инструмент для измерения длины?*

Ответим на первый вопрос. Пусть надо измерить рейку (или бревно) AB метровой линейкой PQ, разбитой на дециметры и сантиметры (рис. 36 и 37). Приложим к рейке AB линейку PQ, совместив их начала A и P. Возможны два случая.

а) Рейка AB не длиннее линейки PQ. Тогда точка B совместится с одной из точек M линейки PQ. На языке геометрии это значит, что на PQ отложен отрезок $PM=AB$. Так как равные отрезки имеют равные длины, то длина рейки AB равна длине отрезка PM на линейке.

Рис. 36

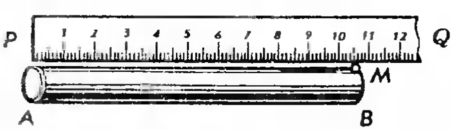


Рис. 37

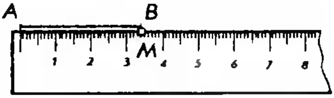


Рис. 38

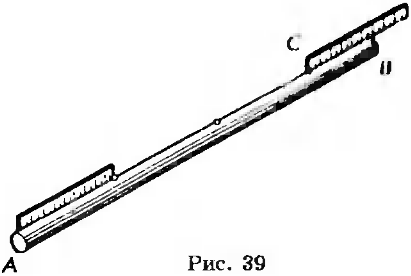


Рис. 39

В случае, когда точка M является одним из делений линейки (дециметровым, сантиметровым), длина отрезка PM указана на линейке (см. рис. 37).

Но может быть, что точка M не совпала ни с одним из делений линейки (рис. 38). Точка M лежит между двумя соседними сантиметровыми делениями M_1 и M_2. В этом случае длины отрезков PM_1 и PM_2 дают приближенное значение длины отрезка PM с точностью до сантиметра (с недостатком или с избытком). Если нужна бóльшая точность, то измеряют отрезок M_1M линейкой с более мелкими, миллиметровыми делениями. Длина отрезка PM будет равна сумме длин отрезков PM_1 и M_1M (по свойству 2). Мысленно этот процесс может продолжаться неограниченно. Практически же он всегда оканчивается, как только мы достигаем нужной точности.

б) Пусть теперь рейка AB длиннее линейки PQ. Будем тогда последовательно откладывать линейкой на рейке метровые отрезки, пока это возможно (рис. 39). Если линейка уложится вдоль рейки, например, ровно три раза, то длина рейки AB равна 3 м. Может случиться, что на AB линейка не укладывается целое число раз. Тогда, отложив ее несколько раз (например, три), получим на рейке остаток CB меньше метра. Длину его измеряем, как в случае а). Длина отрезка AB равна сумме длин AC и CB (по свойству 2). Мы ответили на первый поставленный вопрос.

Ответим теперь на второй. Как, например, сделать планку пригодной для измерения длин? Сначала отложим на ней последовательно любой отрезок, который приняли за единицу длины. При этом укажем, сколько раз он отложен от начала. Затем единичные отрезки делим на меньшие доли, например пополам, и отмечаем соответствующие им деления. И так далее, пока не получим нужную точность. Так и делают линейки, рулетки и т. п.

И еще один вопрос. У равных отрезков длины равны. А верно ли обратное утвёрждение? Равны ли отрезки, у которых длины равны? Ответ утвердительный, но как его обосновать?

Вообще вопросы, связанные с измерением геометрических величин, очень трудны. Они возникли уже у древнегреческого математика Пифагора и его учеников. Окончательное же решение эти вопросы получили лишь в XIX в. На часть из них ответы будут даны в школьном курсе математики, а решение другой части вопросов выходит за его рамки.

Комментарий

Интересно узнать об истории возникновения мер длины. Оказывается, не всегда (и не во всех странах до сих пор) люди пользовались принятой сейчас у нас системой мер.

Первыми «счетными приборами» для измерения длин служили ладонь, сустав пальца, локоть и другие части тела, а также размах рук, шаг. Это было неудобно, так как затрудняло торговлю и другие отношения людей. Постепенно каждое государство установило для своих нужд общие меры (так, например, в Англии — ярд, фут, дюйм; в России — миля, верста, сажень и др.). И лишь в 1795 г. во Франции был утвержден закон о новых мерах, которым был установлен в качестве единицы длины метр. Такая система мер была названа метрической. Постепенно большинство государств мира приняло эту систему мер для себя как обязательную.

Предлагаем небольшую справку о старинных русских и английских мерах длины.

Старинные русские меры длины	*Английские меры длины*
1 миля ≈ 7 верстам	1 ярд = 3 футам
1 верста = 500 саженям	1 фут = 12 дюймам
1 сажень = 3 аршинам	1 дюйм = 10 линиям
1 аршин = 16 вершкам	1 линия = 10 точкам

Петр I установил соотношение между русскими и английскими мерами «лучшего ради согласия с европейскими народами в трактатах и контактах»: 1 сажень = 7 футам.

Чтобы вы смогли пересчитать эти меры длины в метры, укажем, что 1 сажень = 2,13 метра.

§ 2. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. СФЕРА И ШАР

2.1. Круглые предметы. Всем вам понятная фраза футбольного комментатора: «Мяч в центральном круге» — понятна и геометрии. В ней говорится о важнейших «круглых» геометрических фигурах: плоской — *круге* (рис. 40) и пространственной *шаре* (рис. 41). Не будем дальше перечислять примеры реальных предметов, имеющих форму круга или шара,— вы сами назовете их. Напомним лишь самый важный — земной шар.

Чтобы очертить круг на плоскости, надо построить (нарисовать) ограничивающую его окружность. Как это делается циркулем, вам хорошо известно. Но если на футбольном поле надо очертить центральный круг и наметить арену строящегося цирка (само латинское слово «цирк» означает «круг»), то подходящего циркуля не найти. Но оказывается, что в этих случаях можно обойтись простой веревкой или шнурком (рис. 42). Подобно тому как на плоскости границей круга является окружность, так в пространстве границей шара является сфера (см. рис. 41). Примеры реальных сфер очевидны — покрышка футбольного мяча, пленка мыльного пузыря, оболочка воздушного шара (рис. 43). Свойства круга и шара, окружности и сферы, да и сами эти фигуры связаны друг с другом. Например, если шар рассечь плоскостью (рис. 44), то

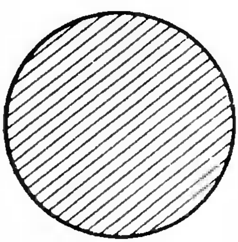


Рис. 40

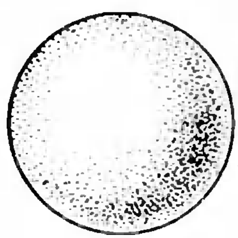


Рис. 41

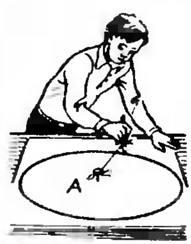


Рис. 42

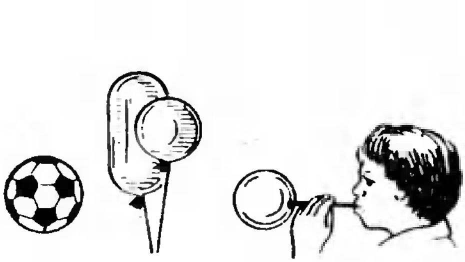


Рис. 43

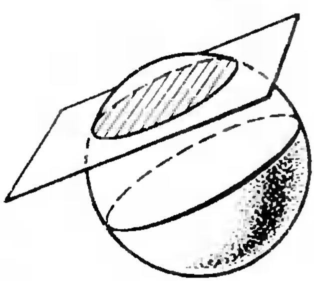


Рис. 44

в сечении получим круг. При этом окружность полученного круга будет сечением сферы, ограничивающей шар. Рисуют окружность на шаре в виде эллипса — «сплюснутой» окружности. (Попробуйте разрезать апельсин или круглую картофелину острым ножом и посмотреть, что будет в сечении.)

Перейдем теперь от наглядных примеров к точным определениям рассматриваемых фигур.

2.2. Определения круга и шара. Проще сначала определить окружность и сферу, а затем круг и шар. Как дать определение окружности, подсказывает способ ее построения с помощью циркуля: все точки окружности, которую чертит грифель одной ножки циркуля, одинаково удалены от ее центра — точки, в которую воткнуто острие другой ножки циркуля. Расстояние между концами ножек циркуля — это радиус окружности.

Итак, даем определение.

Определение

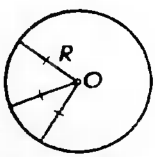


Рис. 45

Окружностью с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удаленных от точки O на расстояние R (рис. 45).

Радиусом окружности называют не только расстояние от точек окружности до ее центра, но и любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности. Все эти отрезки — радиусы одной окружности — равны между собой.

Круг — это фигура, ограниченная окружностью. Каждая точка внутри круга удалена от центра ограничивающей его окружности меньше, чем на радиус. Поэтому круг можно определить иначе.

Определение

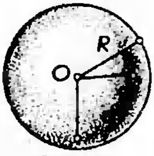


Рис. 46

Кругом с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удаленных от точки O не больше, чем на расстояние R (рис. 46).

В определении сказано: «не больше, чем на расстояние R», это означает, что кругу принадлежат все точки, удаленные от точки O на расстояние R, и все точки, удаленные от точки O на расстояние, меньшее R.

Центр и радиус круга — это центр и радиус окружности, которая его ограничивает.

Сфера и шар определяются почти дословно так же, как окружность и круг. Разница лишь в том, что окружность и круг — фигуры на плоскости, а сфера и шар — в пространстве.

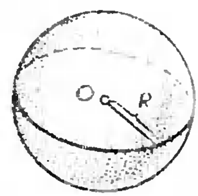


Рис. 47

Итак, сферой с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, удаленных от точки O на расстояние R (рис. 47).

Определение шара дайте самостоятельно.

2.3. Поговорим об определениях. Мы только что сформулировали три определения (окружности, круга и сферы) и попросили вас самих дать определение шара. Легко ли вам было дать сразу точную, правильную формулировку этого определения? Или это получилось только после нескольких неудачных попыток? Не огорчайтесь, если это получилось не сразу. Дать точное определение какого-нибудь понятия обычно трудно. Даже если это понятие хорошо вам знакомо и вы ни с чем его не спутаете. Например, попробуйте дать определение тому, что называется стулом. Трудно? Но ведь никто из вас не спутает стул с табуреткой или с креслом.

Так зачем же формулируют определения? Снова вспомним «Начала» Евклида. На первых страницах своего труда Евклид излагает 23 определения. Среди них есть и определение круга. Вот оно: «Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии (которая называется окружностью), на которую все из одной точки внутри фигуры падающие прямые* равны между собой. Центром же круга называется эта точка».

И в этом и в других определениях у Евклида дается разъяснение того, что означает некоторое слово. И мы поступаем так же. Ведь чтобы затем правильно понимать друг друга, надо каждый раз договариваться о точном смысле произносимых нами слов. Так поступают и в других науках. Например, в грамматике, физике и т. д. Чаще всего в опре-

* Под «прямыми» Евклид имеет в виду отрезки.

делении присутствует слово «называется»: «Кругом называется фигура...», «Глаголом называется часть речи...» и т. п. Но это не обязательно. Например, об окружности можно сказать и так: окружность — это фигура на плоскости, состоящая из всех точек, удаленных от данной точки на заданное расстояние.

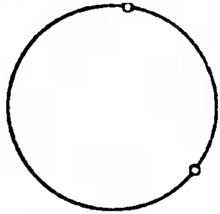


Рис. 48

Переходим теперь к определениям различных частей круга. Их много.

2.4. Части круга. Круг значительно «богаче» отрезка. В нем много разнообразных частей.

1. *Дуга.* Если на окружности взять две точки, то они разобьют окружность на две части (рис. 48). Каждая из них называется **дугой окружности**, а данные точки — концами этих дуг.

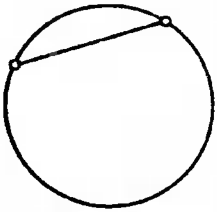


Рис. 49

2. *Хорда.* Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой окружности**, а также хордой ограниченного ею круга (рис. 49).

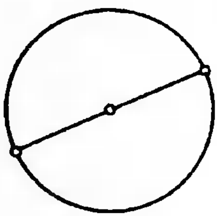


Рис. 50

3. *Диаметр.* Хорда, проходящая через центр окружности (круга), называется **диаметром окружности** (круга) (рис. 50). Диаметр разбивает круг на два полукруга, а его концы разбивают окружность на две полуокружности. Центр окружности разбивает диаметр на два радиуса. Поэтому *диаметр равен двум радиусам, а радиус равен половине диаметра.*

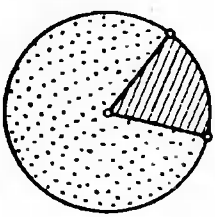


Рис. 51

Диаметром (как и радиусом) называют не только сам отрезок, но и его длину.

4. *Сектор.* Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется **сектором круга** (рис. 51).

5. *Сегмент.* Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется **сегментом** (рис. 52).

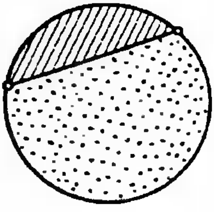


Рис. 52

А теперь вспомним первую фразу этого параграфа о футбольном поле и посмотрим на план такого поля (рис. 53). Назовите известные вам фигуры на этом чертеже.

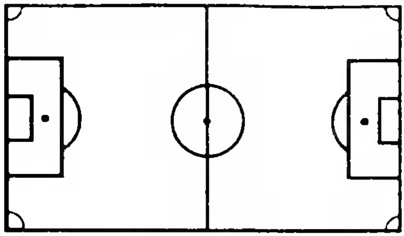


Рис. 53

2.5. Части шара. С геометрией шара и его поверхности — сферы вы уже знакомились на уроках географии, когда изучали земной шар и рассматривали его модель — глобус (рис. 54).

Среди окружностей на земной сфере были выделены **параллели** (рис. 55). Самая большая параллель — экватор. Его радиус равен радиусу Земли. А когда параллели приближаются к полюсам, их радиусы уменьшаются до нуля. Кроме экватора из параллелей выделяют два тропика (северный и южный) и два полярных круга* (тоже северный и южный). Между тропиками лежит тропический пояс. Севернее и южнее тропического пояса между тропиками и полярными кругами лежат два умеренных пояса. Так что мы с вами теперь представляем, что такое «пояс на сфере». А за полярными кругами на земном шаре лежат полярные области. Они как бы отсечены от сферы плоскостями (рис. 56). Такие области на сфере называют **сферическими сегментами**. Вспомните еще о **меридианах** (рис. 57). Все они будут полуокружностями с концами в полюсах. Радиусы их равны радиусу шара.

Рис. 54

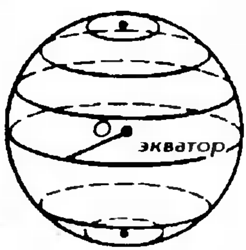


Рис. 55

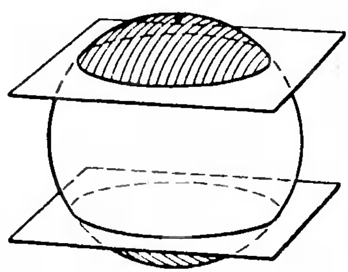


Рис. 56

* Точнее было бы сказать: «полярные окружности».

Рис. 57

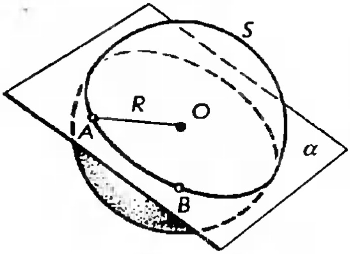


Рис. 58

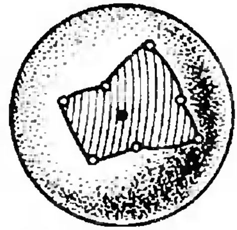


Рис. 59

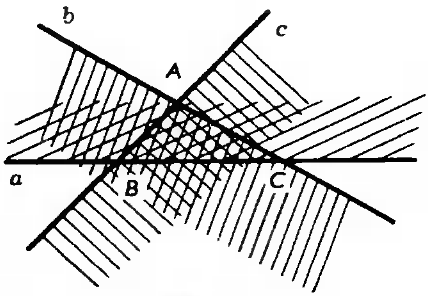


Рис. 60

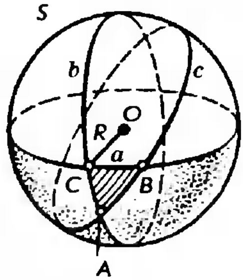


Рис. 61

Те окружности на сфере, радиусы которых равны радиусу сферы, называют еще **больши́ми окружностями**. Все они получаются как сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр (рис. 58). Большой окружностью будет, например, экватор.

Большие окружности на сфере во многом аналогичны прямым на плоскости: например, каждая большая окружность разбивает сферу на две полусферы. А дуги больших окружностей (меньшие полуокружностей) аналогичны отрезкам прямых. Такими дугами ограничены сферические треугольники и многоугольники (рис. 59). Подобно тому как треугольник на плоскости является пересечением трех полуплоскостей (рис. 60), так сферический треугольник — это пересечение трех полусфер (рис. 61). Подумайте и о других фигурах на сфере.

Мы начали разговор о геометрии на сфере, глядя на глобус. Но люди поняли, что Земля — шар, сравнительно недавно (когда?). А сферическая геометрия возникла еще в Древнем Вавилоне и Древней Греции. И появилась она в результате астрономических наблюдений за движением звезд и планет на небесной сфере — так древние представляли себе небесный свод.

2.6. Построение циркулем и линейкой. В элементарной геометрии, той, что изучают в школе, все плоские фигуры состоят из отрезков, окружностей и их дуг или ограничены ими. И для построения такой фигуры (если указаны правила ее построения) достаточно линейки и циркуля: по линейке проводят отрезки, циркулем чертят окружности и их дуги. А строить фигуры с нужными свойствами — одна из важнейших задач геометрии. Евклид уделяет большое внимание построениям, и первое Предложение в его «Началах» — это решение задачи о построении равностороннего треугольника с заданной стороной.

Мы же сейчас решим более сложную задачу: построить треугольник, стороны которого равны трем заданным отрезкам a, b, c. У Евклида это Предложение 22.

Решение: построение проведем по этапам.

1. Проведем прямую l (рис. 62, *а*).

2. Отметим на прямой l точку K (рис. 62, *б*).

3. От точки K на одном из лучей прямой l отложим отрезок KL, равный отрезку a (рис. 62, *в*): $KL = a$.

4. Построим окружность с центром в точке K и радиусом b и окружность с центром в точке L и радиусом c (рис. 62, *г*).

5. Отметим точки пересечения этих окружностей M и N.

6. Проведем отрезки KM и LM. Треугольник, который надо было построить,— это треугольник KLM (см. рис. 62, *г*).

В самом деле, $KL = a$ по построению. $KM = b$, так как точка M лежит на окружности с центром K и радиусом b. И наконец, $LM = c$ — а это попробуйте объяснить сами.

Итак, стороны треугольника KLM равны заданным отрезкам a, b, c. Задача решена.

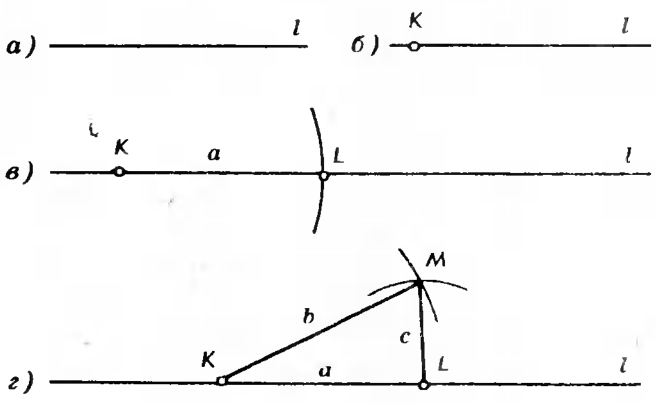


Рис. 62

Обратите внимание, что, решая эту задачу, мы указали правила построения треугольника с нужными свойствами. И пользовались при этом лишь циркулем и линейкой. Задумайтесь еще и над таким вопросом: всегда ли можно построить нужный треугольник, для любого ли набора заданных отрезков? Евклид уже мог ответить на такой вопрос — ведь до решения этой задачи он установил уже 21 Предложение.

Конечно, выполняя построения практически, вы будете использовать кроме линейки и циркуля и другие инструменты. Но все эти построения могут быть сведены к построениям только циркулем и линейкой. Тем самым другие инструменты применяются лишь для удобства.

2.7. Три классические задачи. Любая ли задача на построение решается с помощью циркуля и линейки? Еще в древности греческие математики встретились с тремя задачами на построение, которые не поддавались решению:

1. Задача об удвоении куба. Требуется построить ребро куба, который по объему был бы в 2 раза больше данного куба.

2. Задача о трисекции угла. Требуется произвольный угол разделить на три равные части.

3. Задача о квадратуре круга. Требуется построить квадрат, площадь которого равнялась бы площади данного круга.

Возникновение этих задач связано с целым рядом легенд. Любопытны легенды, связанные с первой задачей. Вот одна из них. Царь Минос велел воздвигнуть памятник сыну Главку. Архитекторы придали памятнику форму куба, ребро которого равнялось 100 локтям. Но Минос нашел этот памятник слишком малым и приказал удвоить его объем. Чувствуя свое бессилие в решении поставленной задачи, архитекторы обратились за помощью к ученым-геометрам, но и те не смогли им помочь.

В настоящее время выяснено, что эти задачи при помощи циркуля и линейки решить нельзя, для их решения требуются еще и другие вспомогательные средства.

Большое место задачам на построение отводится в «Началах» Евклида, где существование фигур доказывается их построением с помощью циркуля и линейки.

2.8. Размышления о решении задач. Вы уже поняли, что при изучении геометрии придется решать много задач и что решение задач — дело непростое. Но в этом и прелесть процесса решения задач. Он похож на работу ученого, когда тот пытается найти решение проблемы. И ему так же трудно, как и вам. Великий французский ученый Анри Пуанкаре утверждал, что поиск решения проблемы надо осуществлять с наслаждением, чувствовать красоту — красоту умозаключений и исследуемого нами мира.

Вот слова Пуанкаре: «Ученый изучает природу не потому, что это полезно; он исследует ее потому, что это доставляет ему наслаждение, а это дает ему наслаждение потому, что природа прекрасна. Если бы природа не была прекрасной, она не стоила бы того, чтобы быть познанной; жизнь не стоила бы того, чтобы быть прожитой».

Решение любой геометрической задачи состоит как бы из трех моментов: увидел, понял, доказал (или вычислил).

«Увидел» — сделал рисунок согласно условию задачи. «Понял» — осознал как соотношения между известными элементами фигуры, так и их связь с искомыми элементами. Глядя на рисунок, наметил путь решения задачи. «Доказал» (вычислил, установил) — выполнил намеченный план решения.

Предлагаем вам задачи, в которых главное — увидеть. Их можно решать даже без чертежа.

1. На сколько частей делят сферу: а) две большие окружности; б) две любые окружности; в) три большие окружности; г) 10 больших окружностей, проходящих через две диаметрально противоположные точки сферы?

2. Отметьте на поверхности шара точку A. Проведите окружность на его сфере с центром в этой точке. Возьмите на этой окружности точки B и C. Объясните, почему треугольник ABC является равнобедренным. Можно ли выбрать точки B и C так, чтобы он был равносторонним?

3. На сфере дана точка. Сколько можно провести через нее: а) больших окружностей; б) окружностей данного радиуса?

4. На сфере даны две точки. Сколько можно провести через них окружностей, лежащих на сфере? Есть ли среди таких окружностей самая большая? Самая маленькая?

5. Плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает ее по большой окружности. Как вы это объясните?

6. Можно ли циркулем постоянного раствора провести такие окружности, радиусы которых различны?

Комментарий

Задумаемся над словами «окружность», «сфера», «круг», «шар», обозначающими геометрические фигуры, и вспомним, что с каждым из них (или с их ближайшими «родственниками») мы встречаемся в жизни. Всем знакомы слова: окружение, сфера общения, сфера обслуживания. Введенные в учебник названия геометрических фигур в каком-то смысле сочетаются с обычным пониманием рассматриваемых слов.

«Хорда» в переводе с греческого — струна. По-видимому, происхождение этого термина в геометрии связано с изготовлением лука, в котором туго натянутая струна — тетива стягивает концы лука.

Диаметр. Здесь полезно обратить внимание на приставку *диа* (что означает — «насквозь») и сравнить со словами: *диа*фильм и *диа*позитив (их демонстрация возможна, если *сквозь* них проходит свет от лампы *диа*проектора или *диа*скопа), *диа*фрагма (отверстие, пропускающее свет или воздух), *диа*лект, *диа*лог. Нам уже встречалось слово *диа*гональ — отрезок, идущий «сквозь» многоугольник от одной его вершины до другой.

Слова «сектор» и «сегмент», оказывается, родственные, так как они происходят от одного и того же латинского слова (как и слово «секира»), которое переводится на русский язык словом «рассекать». Итак, сектор и сегмент рассекают круг, но каждый по-своему. В жизни с этими словами вы, конечно, встречались, например, на стадионе (сектор номер...) или при изучении зоологии (тело многих членистоногих, например сороконожек, состоит из сегментов).

Слово «круглый» в жизни мы употребляем не только для тех предметов, которые имеют форму круга (или шара). Мы называем круглой трубу, вазу, чашку и другие предметы. Интересно задуматься: а так ли мы «грешим» при этом перед геометрией?

§ 3. УГЛЫ

3.1. Что такое угол. Слово «угол» в быту встречается довольно часто: угол комнаты, угол Невского и Садовой или даже «Пять Углов» (это такой перекресток в Санкт-Петербурге). Но в геометрии нет, пожалуй, другой такой фигуры (кроме точек и отрезков), которая появлялась бы чаще, чем угол. И при этом к слову «угол» обычно добавляется еще какое-нибудь слово: *прямой* (рис. 63), *острый* (рис. 64), *тупой* (рис. 65),

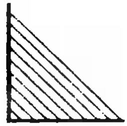


Рис. 63

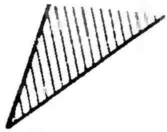


Рис. 64

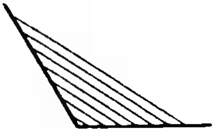


Рис. 65

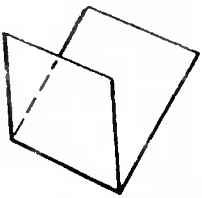


Рис. 66

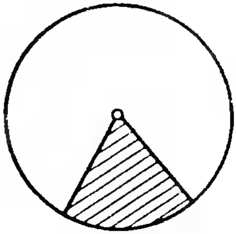


Рис. 67

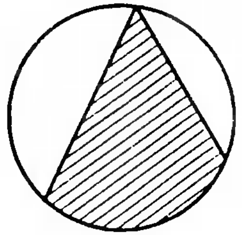


Рис. 68

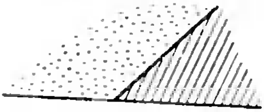


Рис. 69

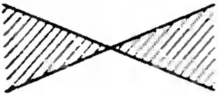


Рис. 70

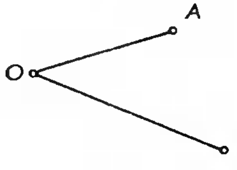


Рис. 71

*двугранный** (рис. 66), *центральный* (рис. 67), *вписанный* (рис. 68) и т. д. и т. п. Каких только углов не бывает!

А бывают еще пары *смежных* углов (рис. 69), *вертикальных* углов (рис. 70) и др.

Нам с вами предстоит постепенно разобраться в этом разнообразии.

Если вас попросят нарисовать угол, то вы, наверное, нарисуете два отрезка с общим началом. Пусть это будут отрезки OA и OB (рис. 71). Вы скажете, что точка O — *вершина* нарисованного вами угла, а *стороны* его — отрезки OA и OB. Но если кто-нибудь затем продолжит отрезки OA и OB за точки A и B соответственно, то угол, образованный продолженными отрезками, будет тот же, что и исходный угол, нарисованный вами. Поэтому считают, что **сторонами** угла являются два луча, имеющих общее начало, а их общая начальная точка называется **вершиной** угла (рис. 72).

Можно было бы на этом остановиться и сказать, что углом называется фигура, образованная двумя лучами с общим на-

* Заметим — это угол в пространстве между двумя полуплоскостями.

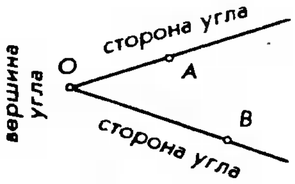


Рис. 72

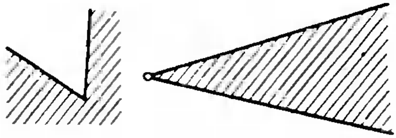


Рис. 73

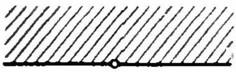


Рис. 74

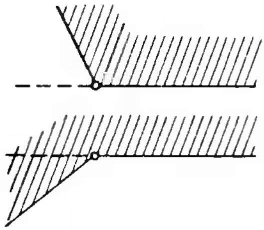


Рис. 75

чалом. Часто так и поступают. Но можно сделать еще один шаг и сказать, что **углом называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом** (рис. 73). Мы примем именно эту точку зрения. В чем преимущество второго определения (хотя оно и чуть сложнее первого), станет ясно позднее.

Среди всех углов прежде всего выделяется тот, стороны которого образуют прямую. Такой угол называется *развернутым* (рис. 74).

Развернутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — его вершина.

Если угол не развернутый, то он может быть меньше или больше развернутого (рис. 75).

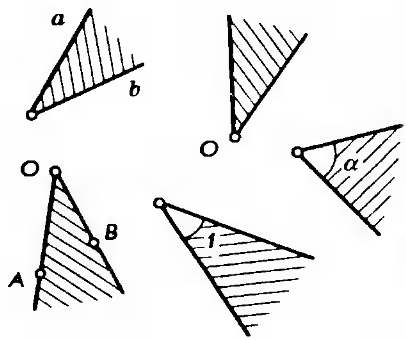


Рис. 76

Мы пока не будем рассматривать углы, которые больше развернутого. Поэтому, говоря слово «угол», мы подразумеваем, что этот угол меньше развернутого.

Углы обозначают по-разному (рис. 76): $\angle ab$, $\angle O$, $\angle AOB$, угол *1*, угол α и т. п. При этом значок «$\angle$» заменяет слово «угол». Когда углы обозначают греческими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) и т. д., значок «$\angle$» не пишут.

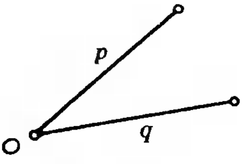


Рис. 77

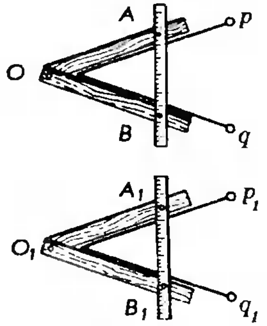


Рис. 78

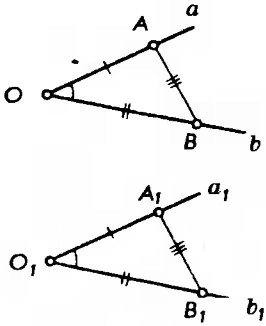


Рис. 79

3.2. Равенство углов. Начнем с практической задачи о построении угла, равного данному (вспомните, что построение фигуры, равной данной, — это одна из первых задач геометрии). Такая задача может решаться по-разному в зависимости от того, какие у вас инструменты и где надо построить угол. Рассмотрим различные случаи.

1. Угол нарисован на листе бумаги, и надо построить равный ему угол на другом листе бумаги. У вас есть карандаш, линейка, а также транспортир или ножницы. Как вы будете действовать?

2. А теперь у вас нет ни транспортира, ни ножниц. Какими инструментами это можно сделать?

Циркулем и линейкой (подумайте, как). Если не придумали, то узнаете, как это делается, из содержания следующего пункта.

3. Наконец, представьте себе, что угол нарисован на земле и вам надо в другом месте на земле начертить такой же угол. А циркуля нет. Но у вас в распоряжении несколько реек, которые можно скреплять. Как вы поступите?*

Давайте обсудим последний случай. Ясно, что действовать в этом случае так же, как, например, в первом, нельзя. Наверное, многие из вас поступили бы так.

Пусть угол O задан двумя отрезками p и q (рис. 77).

Возьмем две рейки, скрепим любые две точки A и B этих реек поперечной рейкой. Из этих трех реек получается жесткая фигура, не изменяющаяся при переносе в другое место. Ее можно перенести в нужное место и очертить там по рейке угол (рис. 78). Он и будет такой же, как данный.

---

* Не торопитесь читать дальше. Сначала сами подумайте.

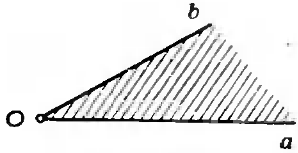


Рис. 80

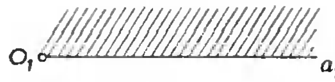


Рис. 81

На основе этого практического построения, проведя его на языке геометрии, определим равенство углов.

Пусть даны два угла: угол с вершиной O и сторонами a, b и угол O_1 с вершиной O_1 и сторонами a_1, b_1 (рис. 79). Допустим, что на их сторонах есть такие точки A, B и A_1, B_1, что $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $AB = A_1B_1$. Тогда эти углы называются **равными**.

Равенство углов записывают так: $\angle O_1 = \angle O$, $\angle a_1b_1 = \angle ab$ или $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$.

Равные углы отмечают одинаковым числом дуг, как на рис. 79.

3.3. Построение угла, равного данному, циркулем и линейкой. Мы уже задавали вам вопрос о таком построении в предыдущем пункте. Если вы имели на него ответ, то сравните его с тем, что мы сейчас предложим.

Итак, пусть дан некоторый угол O со сторонами a, b (рис. 80). Требуется построить равный ему угол. Прежде всего уточним, где? Ведь построение угла состоит в том, что проводятся два луча из одного начала. Так, начало O_1 и первый луч выбираются произвольно. Сделаем этот выбор — начертим такой луч a_1. Теперь ясно, что строить угол, равный углу O, можно с обеих сторон от луча a_1. Поэтому выберем и сторону от a_1 (рис. 81). И вот мы уточнили задачу: нам надо построить угол, равный углу O, с заданной вершиной O_1, заданной стороной a_1 и лежащий с заданной стороны от луча a_1. Более коротко говорят так: *надо отложить данный угол от заданного луча с заданной от него стороны.*

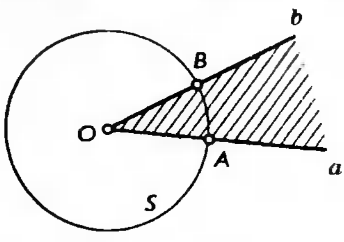


Рис. 82

Эту задачу мы и решим.

Чтобы воспользоваться определением равенства углов, надо сначала на сторонах угла O выбрать две точки (A и B). Сделаем это так: циркулем опишем окружность S с центром O любым радиусом R и отметим те точки A и B, в которых она пересекает лучи a и b (рис. 82).

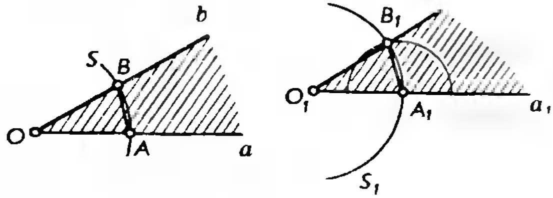


Рис. 83

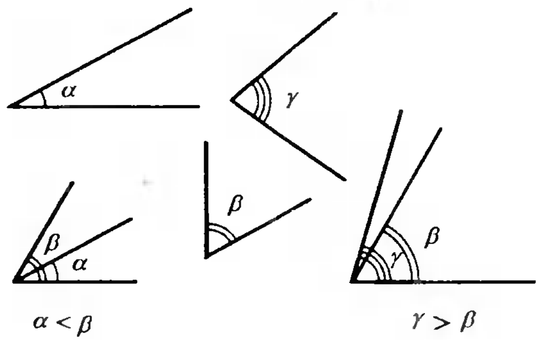


Рис. 84

Теперь на луче a_1 отложим отрезок $O_1A_1 = OA$. Для этого опишем окружность S_1 с центром O_1 и тем же радиусом $R = OA$. В пересечении ее с лучом a_1 получим точку A_1. Нам осталось найти такую точку B_1 с заданной стороны от a_1, чтобы выполнялись равенства $O_1B_1 = OB$ и $A_1B_1 = AB$. Первое из этих равенств говорит, что точка B_1 лежит на окружности S_1. А второе означает, что хорда A_1B_1 окружности S_1 должна быть равна хорде AB окружности S. Вот мы и проведем таким радиусом AB с заданной стороны луча a_1 полуокружность с центром A_1. Точка ее пересечения с окружностью S_1 и будет точкой B_1 (рис. 83). Осталось провести луч O_1B_1, и искомый угол построен. Действительно, для углов O и O_1 выполнены равенства: $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $A_1B_1 = AB$ (мы так строили). Поэтому $\angle O_1 = \angle O$. Задача решена.

Умея строить угол, равный данному, можно сравнить любые два угла (подобно тому, как, откладывая отрезки, их сравнивают) (рис. 84). Объясните подробнее сами, что означает выражение: один из углов больше (или меньше) другого.

3.4. Вопросы, вопросы, вопросы... Аксиома откладывания угла. Вопросов у вас накопилось, наверное, уже немало. Сначала обсудим более простые.

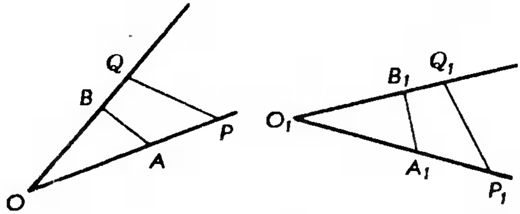


Рис. 85

Во-первых, говоря о равенстве углов и о построении угла, равного данному, мы все время имели в виду и рисовали неразвернутый угол.

А верно ли сказанное в пп. 3.2 и 3.3 для особого случая — для развернутого угла? Верно! Убедитесь в этом самостоятельно и обоснуйте ваши выводы.

Нам в дальнейшем часто придется при решении задач и доказательствах теорем рассматривать отдельно подобные «особые» случаи. Обычно (в учебнике) мы будем разбирать «неособые» случаи, а «особые» оставлять вам для самостоятельного разбора. Как правило, «особые» случаи проще «неособых». Но отбрасывать их нельзя — а вдруг для них сформулированное утверждение неверно?

Второй несложный вопрос: а обязательно ли при построении циркулем и линейкой угла, равного данному (см. п. 3.3), на сторонах угла O откладывать равные отрезки: $OA = OB$? Убедитесь, что это необязательно. Но тогда число операций циркулем увеличится (посчитайте, сколько их будет). Так что речь здесь идет о более коротком (как говорят — более рациональном) решении задачи.

А теперь вопросы посложнее. Представьте себе, что углы O и O_1 равны: на их сторонах нашлись такие точки A, B и A_1, B_1, что выполняются равенства:

$O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$, $A_1B_1 = AB$.

А затем на сторонах угла O мы возьмем другие две точки P и Q и найдем на сторонах угла O_1 такие точки P_1 и Q_1, что выполняются равенства $O_1P_1=OP$ и $O_1Q_1 = OQ$ (рис. 85). Выполняется ли тогда равенство $P_1Q_1=PQ$? Должно выполняться, скажете вы, ведь углы равны. Но в определении равенства углов об этом не сказано. Как быть?

Далее, строя в п. 3.3 угол, равный данному, мы на окружности S_1 искали точку B_1, пересекая ее окружностью с радиусом AB и центром A_1.

А почему эти окружности пересекутся? Почему точка B_1 найдется?

Наконец, такой вопрос. В п. 3.3 мы построили угол O_1, равный углу O, по выбранным точкам A и B. А если на сторонах угла O взять другие точки? Получится ли в итоге тот же самый угол O_1 или, может быть, другой? Иными словами: единственное ли решение имеет задача?

Оказывается, что утвердительные ответы на эти вопросы нельзя дать, опираясь лишь на те аксиомы, что уже были сформулированы. Но все эти ответы можно получить, если принять следующую аксиому об откладывании угла: **от каждого данного луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один.**

В этой аксиоме слова «можно отложить...» гарантируют, что точка B_1 при построении угла O_1 в п. 3.3 найдется. А слова «... и притом только один» говорят о единственности решения задачи в п. 3.3.

Ответ же на первый из трудных вопросов попробуйте найти сами. Если же это у вас не получится, то вы найдете его гораздо позже (в конце второй главы учебника).

3.5. Виды углов. Перечисляя в начале параграфа, какие бывают пары углов, мы называли смежные и вертикальные. На рис. 86 среди изображенных есть такие углы. Вам, наверное, они уже знакомы, и вы сможете назвать, где здесь смежные углы, а где — вертикальные.

Затем, глядя на рисунок, попробуем дать определения таких углов. (Кстати, определения намного легче запоминаются, если вы мысленно видите образ определяемого объекта.)

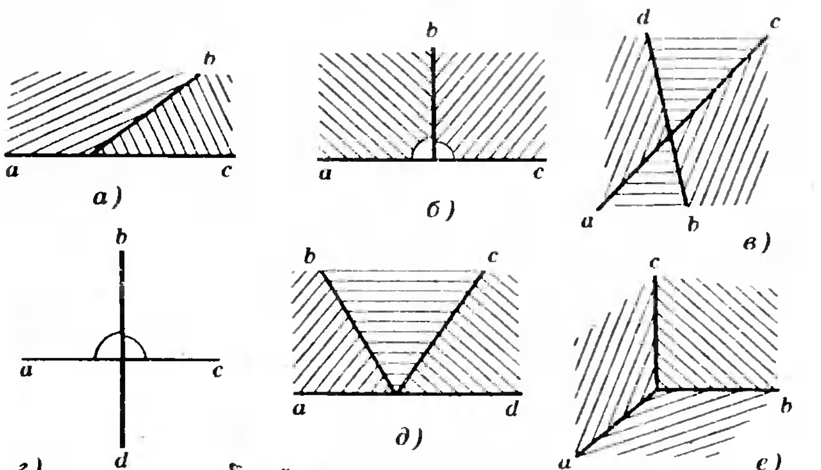


Рис. 86

Вы уже, наверное, отметили, что у смежных углов одна из сторон — общая, а две другие составляют одну прямую. Однако эта фраза хотя и дает представление о смежных углах, но не является определением. В определении обычно присутствует слово «называется» или соответствующая замена этому слову (например, «назовем», или «будем называть», или «называют» и т. п.).

Итак, даем определение.

Определение

Два угла называются смежными, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют прямую (рис. 86, *а*).

В объединении (или в сумме) смежные углы дают развернутый угол.

Переходим к прямому углу. Раньше вы определяли прямой угол как половину развернутого угла. Но его можно определить также, используя понятия смежных углов.

Определение

Прямым углом называется угол, равный своему смежному (рис. 86, *б*).

Другими словами, *прямой угол — это половина развернутого угла.*

На рисунках прямые углы отмечают не дугами, а уголками: так, как показано на рис. 87.

Наконец, рассмотрим вертикальные углы. Их стороны образуют две прямые. Можно также сказать, что они образованы пересекающимися прямыми (посмотрите на раскрытые ножницы). А определить их можно так.

Определение

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 86, *в*).

Две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на две пары вертикальных углов (рис. 88, углы *1*, *3* и *2*, *4*).

Мы часто будем использовать важное свойство вертикальных углов: **вертикальные углы равны.**

Наверное, вы это уже заметили, разглядывая на рисунках вертикальные углы. Но вдруг нам это только показалось? Поэтому надо доказать это свойство. Посмотрим на рис. 89.

Рис. 87

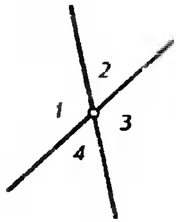


Рис. 88

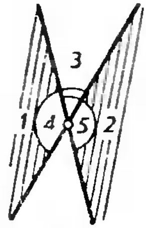


Рис. 89

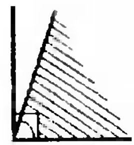


Рис. 90

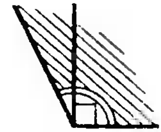


Рис. 91

Развернутые углы *4* и *5* содержат один и тот же угол *3*. Но все развернутые углы равны друг другу. Поэтому если из равных углов *4* и *5* вычесть угол *3*, то останутся равные углы *1* и *2*. А это и есть вертикальные углы, равенство которых мы доказывали.

Попробуем теперь проведенное доказательство выстроить в цепочку верных утверждений:

1) углы *1* и *3* составляют развернутый угол *4*;

2) углы *2* и *3* составляют развернутый угол *5*;

3) развернутые углы *4* и *5* равны;

4) если от равных углов отнять один и тот же угол (или равные углы), то получатся равные углы.

Этих утверждений достаточно, чтобы сделать вывод о равенстве вертикальных углов *1* и *2*.

Напомним еще, что **угол, меньший прямого угла, называется острым** (рис. 90), а **угол, больший прямого угла, называется тупым** (рис. 91).

Комментарий

Слова «смежный» и «вертикальный» известны нам из жизни: мы знаем, что смежными бывают комнаты, вертикальными — линии, идущие сверху вниз, отвесно. В геометрии этим словам придается другой смысл: смежные углы (в отличие от комнат) не только имеют общую сторону, но обладают еще одним важным свойством — другие их стороны дополняют друг друга до прямой; вертикальные углы не обязательно расположены так, что один из них находится «выше», чем другой.

3.6. Вопросы, вопросы, вопросы... Действия с углами. Предыдущий пункт (3.5), очевидно, породил у вас много вопросов. Давайте обсудим их. Например, там было сказано, что смежные углы в сумме дают развернутый угол. А что такое «сумма углов»? Как складывают углы? В общем случае так же, как сложены смежные углы,— одна сторона у них общая, и они лежат по разные стороны от нее (рис. 92).

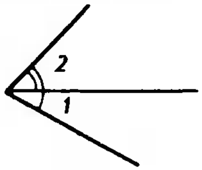
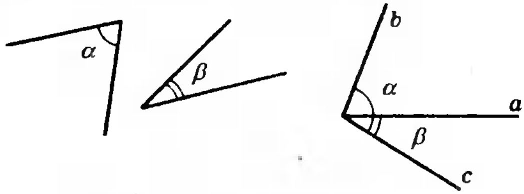


Рис. 92



а) б)

Рис. 93

Пусть нам даны два угла α и β (рис. 93, *а*).

Возьмем любой луч *a* и с одной стороны от него отложим $\angle ab = \alpha$, а с другой — $\angle ac = \beta$. Тогда $\angle bc$— объединение углов *ab* и *ac* — будет суммой углов α и β (рис. 93, *б*). Здесь вы, наверное, уже почувствовали, что складывать углы удобнее, считая их частью плоскости, ограниченной двумя лучами, а не просто парой лучей.

Отметим два обстоятельства. 1. При сложении двух углов, меньших развернутого, может в сумме получиться угол больше развернутого (рис. 94). 2. Складывая два угла, обычно откладывают один из них от стороны другого угла (рис. 95), второй же «оставляют на месте».

Если есть операция сложения углов, то, естественно, появляется и обратная ей операция — вычитание.

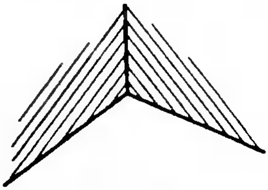


Рис. 94

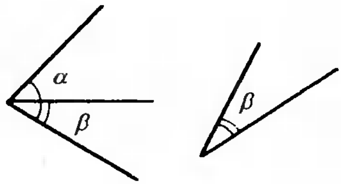


Рис. 95

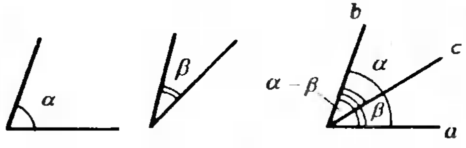


Рис. 96

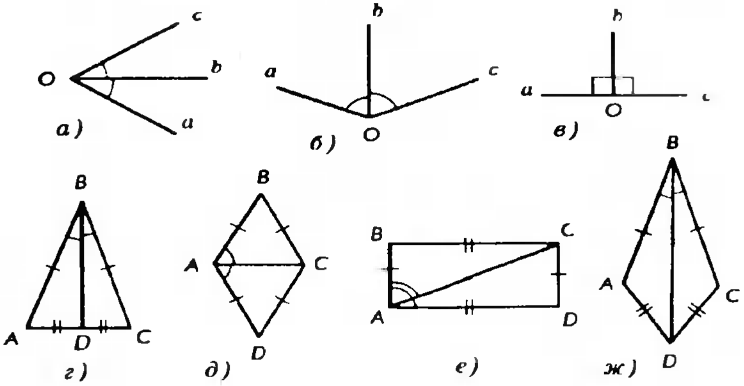


Рис. 97

Ясно, что когда вычитают из угла α меньший угол β (обязательно меньший!), то откладывают эти углы по одну сторону от некоторого луча a: $\angle ab = \alpha$ и $\angle ac = \beta$ (рис. 96). Тогда $\angle bc = \alpha - \beta$. Действительно, так как угол $\alpha = \angle ab = \angle ac + \angle bc = \beta + \gamma$, то $\angle bc = \gamma = \alpha - \beta$.

Операцию вычитания углов мы использовали при доказательстве равенства вертикальных углов. И не только саму операцию, но и ее с в о й с т в о: *если от равных углов отнять равные углы, то получим равные углы.*

В предыдущем пункте описаны простейшие случаи и операции умножения и деления углов: мы говорили, что развернутый угол — это удвоенный прямой, а прямой угол — это половина развернутого.

Очень важно уметь разделить угол пополам, т. е. на два равных угла. В «Началах» Евклида об этом говорится в Предложении 9. А у нас этому специально посвящен следующий пункт.

Отметим еще такое свойство деления: *половины равных углов равны.* Из этого свойства следует, что *все прямые углы равны друг другу* (как половины равных друг другу развернутых углов).

3.7. Биссектриса угла. Взаимно перпендикулярные прямые. Определение биссектрисы вы легко дадите, глядя на рис. 97,*а*.

Да, **биссектрисой угла называется луч, который делит угол пополам.** (А можно ли это сказать иначе?)

Давайте подумаем, какие из позиций рис. 97 подсказывают нам способ построения биссектрисы угла? Догадались? Да, это позиции *д*) и *ж*) (иначе говоря, рис. 97, *д*, *ж*).

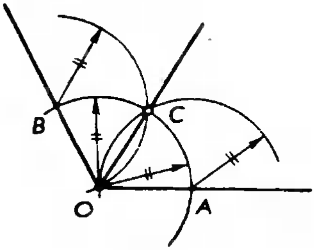


Рис. 98

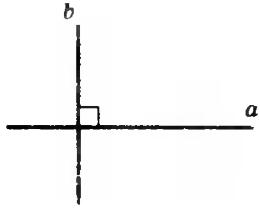


Рис. 99

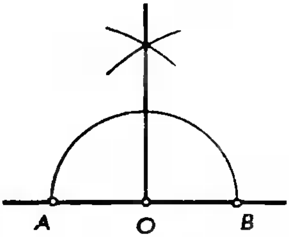


Рис. 100

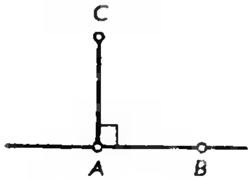


Рис. 101

Вот как по «подсказке», содержащейся на рис. 97, *д*, делят угол пополам циркулем и линейкой (рис. 98).

Равенство углов AOC и BOC вытекает из их определения, так как $OA = OB$, $OC = OC$ и $AC = BC$. А построение по «подсказке» на рис. 97, *ж* выполните сами и сравните эти два построения.

С построением биссектрисы угла мы свяжем и построение взаимно перпендикулярных прямых. Напомним, что **прямые называются взаимно перпендикулярными, если, пересекаясь, они образуют прямые углы** (рис. 99). **А луч или отрезок, проведенный из точки на прямой и образующий с нею прямые углы, называется перпендикуляром к этой прямой** (рис. 100).

Перпендикулярность обозначается значком «$\perp$» ; $a \perp b$ или $AB \perp AC$ (рис. 101).

Перпендикуляр к прямой a в некоторой ее точке O и биссектриса развернутого угла, ограниченного прямой a с вершиной в точке O,— это одно и то же. Сделанное построение биссектрисы вместе с его обоснованием полностью годится и для развернутого угла. Ведь мы нигде не использовали то обстоятельство, что угол неразвернутый. На рис. 100 изображено то же построение для развернутого угла.

Итак, мы решили с помощью циркуля и линейки такие задачи на построение: построить прямой угол; в данной точке прямой провести перпендикуляр к ней.

Комментарий

Обратите внимание, что в слове «биссектриса» корень — *сектр* (знакомо, правда?), а приставка — *бис*, что означает «дважды».

3.8. Задача о делении угла на равные части циркулем и линейкой. Мы научились циркулем и линейкой делить пополам любой угол, а значит, мы можем разделить его циркулем и линейкой на 4, на 8, на 16 и т. д. равных частей. А как? И можно ли циркулем и линейкой разделить любой угол, например, на три равные части? Эту задачу пытались решить еще древнегреческие математики. Она получила название *задачи о трисекции угла*. Некоторые углы, например прямой или развернутый, можно разделить на три равные части. Как это сделать, вы скоро узнаете. Но решения, пригодного для любого угла (подобно тому, как это было сделано для деления угла пополам), для задачи о трисекции ни в Древней Греции, ни позднее найти не удавалось. И лишь в XIX в. доказали, что для произвольных углов такого решения с помощью циркуля и линейки не существует. Например, нельзя разделить циркулем и линейкой на три равные части угол в 60°.

Оказалось, что вопрос о возможности решить задачу на построение циркулем и линейкой сводится к вопросу о разрешимости некоторых алгебраических уравнений. И ответ о неразрешимости задачи о трисекции угла циркулем и линейкой дала алгебра*.

3.9. Измерение углов. Как каждый отрезок имеет величину — длину отрезка, так и каждый угол тоже имеет некоторую величину, которая называется **мерой угла**.

Мера угла обладает следующими основными свойствами, аналогичными основным свойствам длины отрезка:

1. Меры равных углов равны.

2. При сложении углов их меры складываются.

Измерение углов подобно измерению отрезков: оно состоит в сравнении измеряемого угла с углом, принятым за единицу измерения. Этот угол, а если нужно и его доли, откладываются на измеряемом угле. В результате получается *численная мера угла при данной единице измерения*, т. е. число, показывающее, сколько раз угол, принятый за единицу измерения, и его доли укладываются на данном угле.

---

*Используя другие инструменты, эту задачу решить можно, а приближенно можно решить циркулем и линейкой.

За единицу измерения, как вы знаете, принимают **градус** — 1/90 часть прямого угла. Стало быть, угол в один градус — это такой угол, что прямой угол является суммой 90 равных ему углов. Один градус пишут так: 1°.

Прямой угол имеет меру 90°, развернутый угол равен 180°.

Градус делится на 60 **минут**, а минута — на 60 **секунд**. Одну минуту обозначают $1'$, одну секунду — $1''$, так что, например, если угол имеет меру в 17 градусов 25 минут и 34 секунды, то пишут $17^\circ 25' 34''$.

При большей точности берутся и доли секунды. Если угол измеряется в градусах, минутах и секундах (и их долях), то говорят о градусной мере угла.

Часто вместо «мера угла» говорят просто «угол», подразумевая при этом не только фигуру, но и ее величину. Например, говорят: «Угол равен 30 градусам» вместо: «Мера угла равна 30 градусам». И мы будем так говорить, когда это не приводит к путанице.

Практически углы измеряют с помощью транспортира. При более точных измерениях пользуются и другими приборами. Измерение углов производится так же, как измерение длин отрезков. Откладывают или отсчитывают на транспортире, как на линейке, целые градусы. Если же остался остаток, а нужна точность, бо́льшая, чем в 1°, то на остатке откладывают минуты, секунды и т. д. Можно даже сказать, что транспортир — это «кривая линейка».

В приборах, служащих для измерения углов, углы отмечают на окружности, как это делается на транспортире (рис. 102).

Для численной меры угла, в частности для градусной меры, выполняются свойства, аналогичные свойствам численных значений длин отрезков.

Это означает следующее:

1. *Меры равных углов равны*, и обратно: *если меры углов равны, то углы равны*. Поэтому задать угол можно, задав его меру.

2. *Больший угол имеет бо́льшую меру*, и обратно: *если мера одного угла больше меры другого, то первый угол больше второго.*

3. *При сложении углов меры их складываются, а при вычитании — вычитаются.*

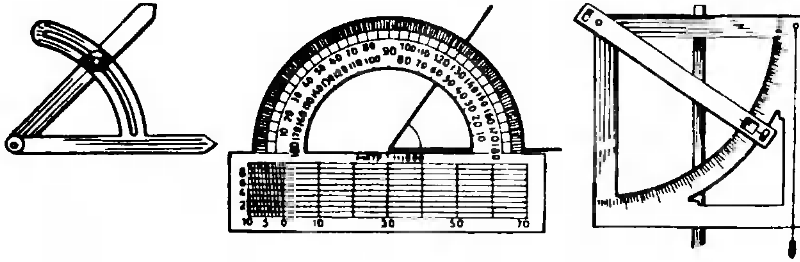


Рис. 102

Полный угол вокруг точки состоит из двух развернутых и, стало быть, составляет 360°. Возможно, выбор такого числа связан с тем, что в году примерно 360 дней, а также с системой счисления в Древнем Вавилоне, в которой особое место занимало число 60. Кроме градусов, минут, секунд принята также другая единица измерения углов. С нею мы познакомимся позже.

Комментарий

Вы, наверное, обратили внимание на то, что мера углов обладает теми же свойствами, что и длина отрезков. И измерение углов, как и отрезков, производится с помощью «линейки», которая, правда, очень своеобразна: шкала этой линейки расположена на окружности. Это естественно: отрезок прямолинеен, следовательно, продолжая его, мы производим действия на прямой, и потому здесь прямолинейная линейка вполне уместна. Складывая же углы, мы как бы поворачиваемся вокруг некоторой точки *O* — общей вершины этих углов, и потому дуга окружности с центром в точке *O* может служить мерой этого поворота. Именно поэтому шкала делений транспортира расположена на окружности. Большинство других приборов, предназначенных для измерения углов, построено по этому же принципу.

А слово «транспортир», как и слово «транспорт», происходит от французского «transporter», что в переводе на русский язык означает «переносить». Видимо, первоначально транспортир употреблялся не столько для измерения углов, сколько для того, чтобы «переносить» угол с одного места на другое, т.е. для построения угла, равного данному, в заданном месте.

Глава 2

Треугольники

Простейший из многоугольников — треугольник играет в геометрии особую роль. Без преувеличения можно сказать, что вся (или почти вся) геометрия со времен «Начал» Евклида покоится на теоремах о треугольниках. За несколько тысячелетий геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о «геометрии треугольника» как о самостоятельном разделе элементарной геометрии.

Первым стали изучать равносторонний треугольник, т. е. треугольник, все стороны которого равны. На рис. 103 изображено несколько равносторонних треугольников (и только равносторонних). Рассматривая этот рисунок, вы, наверное, сможете ответить применительно к равностороннему треугольнику на те основные вопросы, которые будут изучены в этой главе для произвольных треугольников: когда два равносторонних треугольника равны и чему равна сумма углов треугольника?

Какие ответы вы дадите? Можете ли вы их обосновать?

Древние считали равносторонний треугольник столь важной фигурой, что Предложение 1 в «Началах» Евклида звучит так: «На данной ограниченной прямой (т. е. на отрезке.—*Авт.*) построить равносторонний треугольник». Как решена эта задача в «Началах», ясно из рис. 104.

Наконец, еще раз напомним о египетских пирамидах. Ведь их боковые грани — равносторонние треугольники (рис. 105).

§ 4. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

4.1. Треугольник и его элементы. Вспомним, что такое треугольник. Возьмем три точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками *AB*, *BC*, *CA* (рис. 106). Получим фигуру, состоящую из этих трех отрезков и ограниченной ими части плоскости,— треугольник. Итак, **треугольником называется часть плоскости, ограниченная тремя отрезками.**

Точки *A*, *B*, *C* называются **вершинами**, а отрезки *AB*, *BC*, *CA* — **сторонами треугольника**.

Сам треугольник называют и обозначают по его вершинам: треугольник *ABC* или, короче, ΔABC.

Угол *A* треугольника *ABC* — это угол между его сторонами *AB* и *AC*. В треугольнике *ABC* три угла: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Стороны и углы треугольника называются его **элементами**.

В треугольнике *ABC* против вершины *A* лежит сторона *BC*. И наоборот, против стороны *BC* лежит угол *A*. Про вершину *A* и угол *A* говорят, что они **противолежащие стороне** *BC*. И о стороне *BC* говорят, что она **противолежащая вершине** *A* и углу *A*. Сторону, противолежащую вершине *A*, часто обозначают буквой *a*.

Точно так же сторона *AC* — противолежашая вершине (и углу) *B*. Эту сторону обозначают буквой *b*. Сторона *AB* — противолежащая вершине (и углу) *C*; ее обозначают буквой *c*.

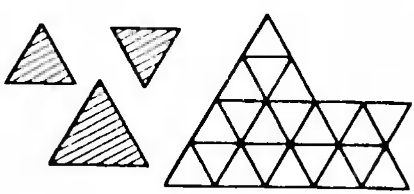


Рис. 103

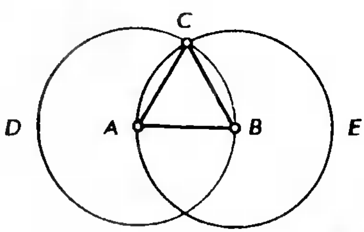


Рис. 104

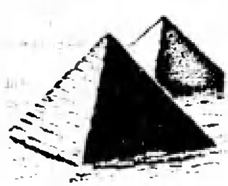


Рис. 105

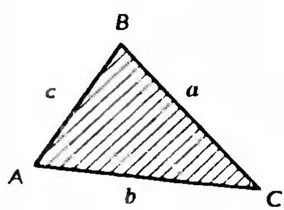


Рис. 106

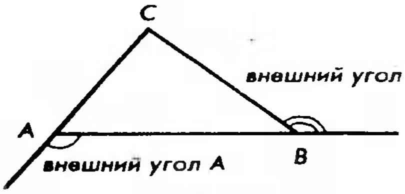


Рис. 107

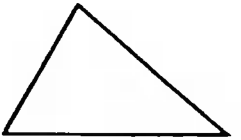


Рис. 108

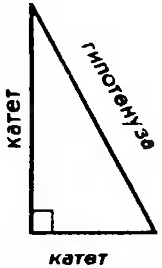


Рис. 109

Рис. 110

Углы A **и** B в треугольнике ABC называют **прилежащими к стороне** AB. Точно так же углы B и C — прилежащие к стороне BC, а углы C и A — прилежащие к стороне CA.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с одним из углов треугольника (рис. 107).

4.2. Виды треугольников. По виду углов различают три вида треугольников: а) **остроугольные**, у которых все углы острые (рис. 108); б) **прямоугольные**, у которых один из углов — прямой (рис. 109); в) **тупоугольные**, у которых один из углов — тупой (рис. 110).

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называют **катетами**, а сторону, противолежащую прямому углу, называют **гипотенузой**.

Таким образом, все треугольники мы разбили по виду их углов на три класса, т. е. провели *классификацию треугольников*. В дальнейшем мы часто будем классифицировать геометрические фигуры. При этом надо следить за тем, чтобы одна и та же фигура не попадала в разные классы (как и ученики в школе), но обязательно попала в один из классов.

Обратите внимание, что классификация проводится и в других науках, например в ботанике, зоологии, грамматике и т. д.

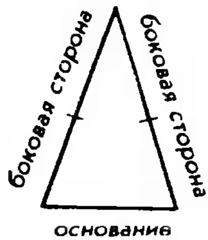


Рис. 111

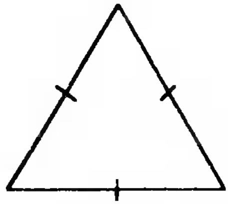


Рис. 112

Выделим еще виды треугольников, но теперь уже сравнивая стороны треугольников, а не углы. Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона — основанием (рис. 111).

Если все стороны треугольника равны, то треугольник называется равносторонним (рис. 112). Равносторонний треугольник еще называют правильным треугольником.

А такой треугольник, в котором все стороны различны, называется разносторонним.

Комментарий

С классификацией мы встречаемся в обыденной жизни довольно часто. Например, вытирая вымытую посуду, мы можем расставить ее так: в одно место поставить все тарелки, в другое — все чашки и т. д. Тем самым мы разложим всю посуду на группы или, иначе, классифицируем ее по назначению. Можно было бы ту же посуду распределить иначе: в одно место — фарфоровую, в другое — стеклянную, в третье — металлическую и т. д. Это была бы другая классификация — по сорту материала, из которого изготовлена эта посуда. Понятно, что если бы мы решили в один «класс» отправить все чашки, а в другой — все предметы, сделанные из фарфора, то мы не получили бы классификации, так как могло бы оказаться, что у нас есть фарфоровая чашка, а в какой «класс» ее надо отправить — непонятно.

Итак, классификация предметов (или объектов, как в геометрии; в нашем случае — треугольников) — это такое разбиение их на группы, что, во-первых, каждый предмет (объект) входит в какую-нибудь группу и, во-вторых, никакой предмет не входит в две или более групп.

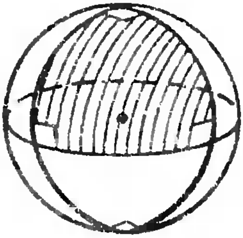


Рис. 113

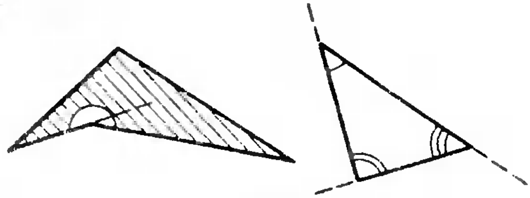


Рис. 114

4.3. Вопросы, вопросы, вопросы... Сначала вопросы об углах. Когда мы говорим «прямоугольник», то имеем в виду четырехугольник, у которого все четыре угла прямые. А у прямоугольного треугольника не три прямых угла, а лишь один (см. рис. 109). Почему?

Бывают треугольники, у которых все углы прямые, но не на плоскости, а на сфере — **сферические треугольники**. Таким, например, является треугольник, ограниченный двумя меридианами и экватором, если между меридианами угол равен 90° (рис. 113). Глядя на глобус, укажите на нем еще какие-нибудь сферические треугольники.

Но на сфере — сферическая геометрия, а у нас на плоскости — «евклидова». В конце этой главы мы докажем, что в каждом треугольнике всегда есть два острых угла. Поэтому на долю прямых и тупых углов в треугольнике остается разве лишь одно место. Но уж если это место занял прямой или тупой угол, то он и дает название всему треугольнику — прямоугольный или тупоугольный.

Заметим еще, что каждый из углов треугольника всегда меньше 180°. А для четырехугольников это уже, вообще говоря, не так. Убедитесь в сказанном, посмотрев на рис. 114.

Теперь вернемся к определению треугольника. Мы назвали треугольником часть плоскости, ограниченную тремя отрезками. А что значит «ограниченную»? Что такое «граница» фигуры? Интуитивно ясно, что граница должна отделять фигуру от остальной части плоскости (или, скажем, сферы, если фигура лежит на сфере), как границы государств на земном шаре или границы их изображений на карте или глобусе. Ответы на эти вопросы мы дадим не скоро, в конце курса.

А пока о том, что точка лежит внутри многоугольника или на его границе, мы будем говорить, опираясь на наглядность.

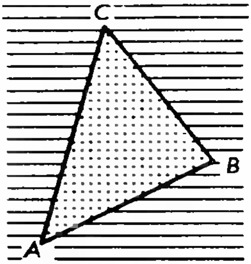


Рис. 115

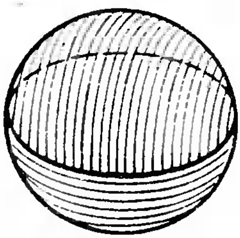


Рис. 116

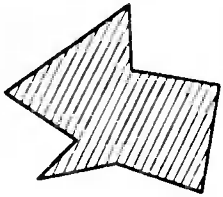


Рис. 117

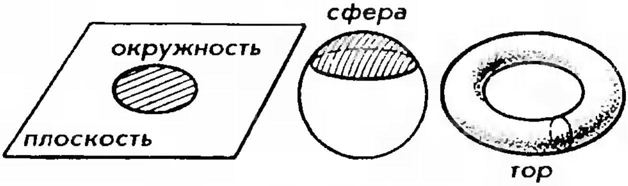


Рис. 118

Заметим еще, что трехзвенная замкнутая ломаная, состоящая из отрезков *AB*, *BC*, *CA*, разбивает плоскость на две фигуры, для которых она является их общей границей (рис. 115), подобно тому как экватор разбивает сферу на две полусферы (рис. 116).

Но если две полусферы на сфере одинаковы, равноправны, то две части плоскости, ограниченные отрезками *AB*, *BC*, *CA*, не равноправны. Одна из них имеет конечные размеры, другая — бесконечные. И говоря в определении треугольника *ABC* о том, что он ограничен отрезками *AB*, *BC*, *CA*, мы имеем в виду фигуру конечных размеров.

Аналогично: говоря, что простая замкнутая ломаная ограничивает на плоскости многоугольник, мы имеем в виду под многоугольником именно конечную часть плоскости, ограниченную этой ломаной (рис. 117).

Заметим еще, что замкнутая линия, например окружность, разбивает не каждую поверхность, на которой она лежит. Плоскость и сферу разбивает, а тор (поверхность бублика) — нет (рис. 118). Если сферу или плоскость «разрезать» по окружности, то они распадутся на две части, а тор — нет.

Всех этих вопросов о том, что значит «ограничивает», «граница» и т. д., не возникло бы, если бы мы определили ΔABC как фигуру, состоящую из трех отрезков *AB*, *BC*, *CA*. Часто так и делают. И если линейку можно считать моделью

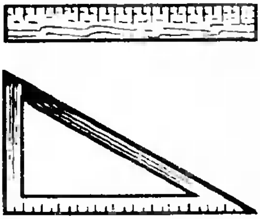


Рис. 119

отрезка, то чертежный треугольник — это модель такого «каркасного» треугольника (рис. 119). Но при таком определении треугольника возникнут другие вопросы: что значит площадь такого треугольника? можно ли считать треугольником грани пирамид (например, египетских)? как такой треугольник вырезать из бумаги?.. и т. п.

Поэтому дальше мы под треугольником будем понимать часть плоскости, а не три отрезка. А треугольники, состоящие из трех отрезков, будем называть «каркасными».

Комментарий

В п. 4.3 приводится пример поверхности тора, которая не всегда распадается на две части, если на ней проведена замкнутая линия. Познакомим вас с еще одной поверхностью, которая обладает не только этим, но и еще одним свойством, весьма неожиданным. Эта поверхность называется листом Мёбиуса. Ее легко сделать самим. Возьмите прямоугольную, не очень широкую — для удобства — полоску бумаги *ABCD*. Проведите на ней (с двух сторон) отрезок *MN*, соединяющий середины *M* и *N* отрезков *AB* и *CD* (рис. 120). Теперь склейте эту полоску так, чтобы точка *A* совпала с точкой *C*, а точка *B* — с точкой *D* (рис. 121). Если вы теперь разрежете полученную поверхность по линии, которую вы начертили раньше, то заметите, что поверхность не распалась на два куска. Более того, оказывается, после склеивания она «потеряла» одну сторону! И можно, не переходя через край поверхности, обойти ее по всей нарисованной вами линии, идущей через точки *M* и *N*! Попробуйте повторить процедуру разрезания поверхности. У вас получится... что?

Уточним еще, что когда говорят: многоугольник — это конечная часть плоскости, ограниченная простой замкнутой линией, то под этим понимают, что имеется такой круг, в котором помещается данный многоугольник.

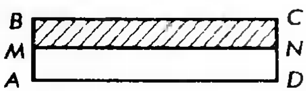


Рис. 120

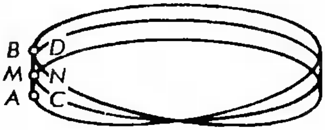


Рис. 121

4.4. Биссектриса, медиана и высота треугольника. Если в треугольнике ABC соединить вершину A отрезками с точками противоположной стороны BC, то все такие отрезки заполнят этот треугольник (рис. 122).

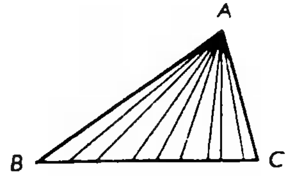


Рис. 122

Можно даже определить треугольник ABC как фигуру, образованную всеми отрезками, соединяющими точку A со всеми точками отрезка BC (считая при этом, что точка A не лежит на прямой BC).

Из всех отрезков, соединяющих вершину треугольника с точками противоположной стороны (а иногда и ее продолжения), особенно важны три отрезка. Их называют *медиана*,

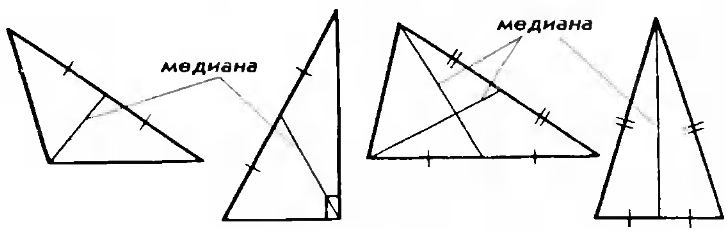


Рис. 123

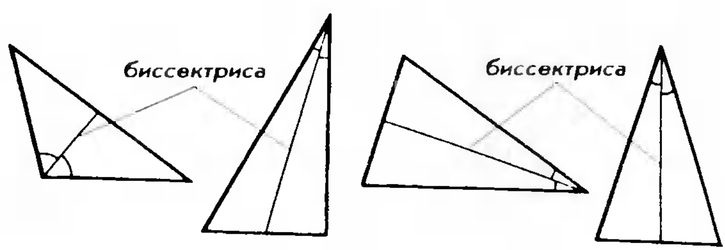


Рис. 124

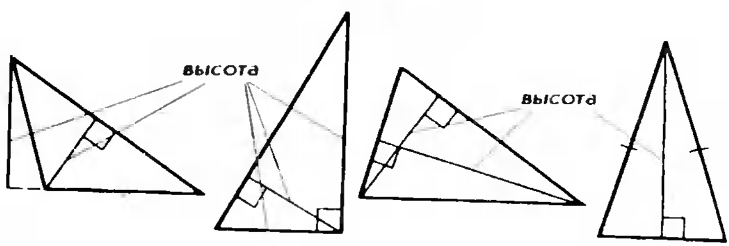


Рис. 125

биссектриса, высота, и они, по-видимому, уже вам знакомы. Посмотрим на рис. 123—125 (с. 57) и вспомним их определения.

На рис. 123 изображены медианы различных треугольников. Дайте определение медианы, глядя на этот рисунок.

Сравните ваше определение с таким: **медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника.**

На рис. 124 нарисованы те же треугольники и биссектрисы в этих треугольниках. Теперь, глядя на этот рисунок, определите, что называется биссектрисой треугольника, и сравните ваше определение со следующим: **биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны треугольника.**

Наконец, на рис. 125 изображены высоты в тех же треугольниках. Определите, что называется высотой треугольника, и сравните ваше определение с приведенным: **высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или ее продолжение.**

Подумайте, когда высота треугольника лежит внутри треугольника, когда она совпадает с его стороной, а когда идет вне треугольника. Можете ли вы дать объяснение своим выводам?

Комментарий

Обратите внимание на то, что слова «медиана», «медиатор», «медик» — однокоренные, они происходят от слова «медиум» — посредник, средний. Медиатор — предмет, позволяющий музыканту (например, гитаристу) извлекать звук из своего музыкального инструмента; медик — врач, с помощью которого происходит исцеление больного.

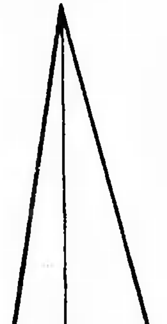


Рис. 126

Понятие высоты треугольника, возможно, усвоится лучше, если обсудить его и для стереометрических объектов. Подобно тому как спичечный коробок меняет свою высоту в зависимости от того, на какую грань он поставлен, так и треугольник может быть «высоким» или «низким», т. е. разной высоты,— в зависимости от того, какую из его сторон мы считаем основанием. Нарисуйте, например, треугольник, в котором одна из сторон в 5 раз больше другой стороны, и измерьте его высоты. Вы увидите, что высота треугольника тем больше, чем меньше сторона, на которую высота опущена (рис. 126).

4.5. Сопоставление элементов треугольников. Как уже говорилось во введении, одна из первых задач геометрии состоит в сравнении фигур. Мы будем сравнивать треугольники по их сторонам и углам.

При сравнении двух треугольников их вершины сопоставляются друг другу, или, другими словами, ставятся в соответствие друг другу. Удобно и принято обозначать сопоставляемые вершины одними и теми же буквами, различая их дополнительными значками: вершине A сопоставлена (соответствует) вершина A_1, вершине B — вершина B_1, а вершине C — вершина C_1 (рис. 127). Тем самым сопоставляются углы и стороны: стороне AB соответствует сторона A_1B_1 и т. д. (соответственные стороны соединяют соответственные вершины).

Если соответственные стороны равны, то это отмечают поперечными черточками — одной, двумя, тремя, как на рис. 128. Равные углы отмечают одинаковым числом дуг, как показано также на рис. 128.

Часто приходится сравнивать треугольники, у которых сопоставляемые вершины обозначаются разными буквами. Например, пусть в треугольниках ABC и KMP (рис. 129) вершине A сопоставляется вершина K, вершине B — вершина M, а вершине C — вершина P. Укажите в этих треугольниках соответственные стороны.

4.6. О равенстве треугольников. Мы сейчас обсудим с вами одно из самых важных понятий геометрии — *понятие о равенстве треугольников*. Изучая различные равные фигуры, мы как бы поднимаемся по лестнице: первая ступенька — равные отрезки, вторая — равные углы, третья — равные тре-

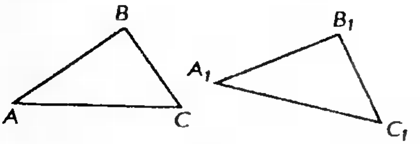


Рис. 127

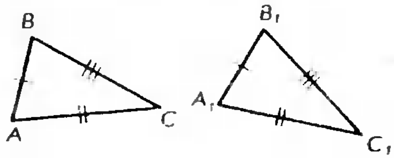


Рис. 128

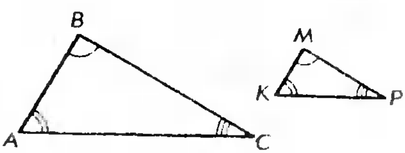


Рис. 129

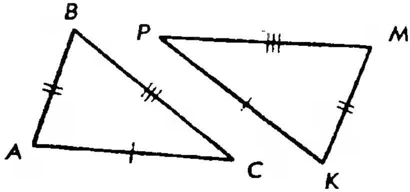


Рис. 130

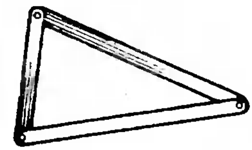


Рис. 131

угольники, ну а четвертая — это уже произвольные равные фигуры. На четвертую ступеньку мы шагнем только через два года, потому что понятия о равенстве треугольников достаточно для построения всей элементарной геометрии. О равенстве же произвольных фигур стали говорить в геометрии лишь в XIX в. Так что мы с вами шагнем дальше Евклида, но это будет позднее. Напомним вам еще, что сравнение фигур — это одна из основных задач геометрии.

Как же сравнить два реальных треугольника, узнать, равны ли они? Если эти треугольники изготовлены из бумаги, картона и т.п., то вы можете наложить их друг на друга, и если при наложении они совместятся, то такие треугольники равны. Так рассуждал и Евклид.

Ну а если эти треугольники ABC и KMP нарисованы на доске (рис. 130)? Как вы поступите в этом случае? Скорее всего так.

Сначала сравните их стороны. Допустим, что из сторон этих треугольников образуются три пары равных отрезков, например $AB = KM$, $AC = KP$, $BC = MP$. Тогда можно утверждать, что треугольники ABC и KMP равны. Как это обосновать? Можно сослаться на такой опыт. Изготовим из реек, равных отрезкам AB, AC, BC (а значит, и отрезкам KM, KP, MP), «каркасный» треугольник (рис. 131). Получится жесткая конструкция. (Сразу же отметим, что из четырех реек такой каркас жестким уже не будет, рис. 132). Углы в этом каркасном треугольнике равны углам треугольников ABC и KMP (подумайте, почему).

Если такой каркас обтянуть, например, тканью или бумагой, то получим треугольник, который можно наложить с совмещением и на ΔABC, и на ΔKMP. Следовательно, эти треугольники равны.

Из того, что мы сейчас рассказали, можно сделать два вывода.

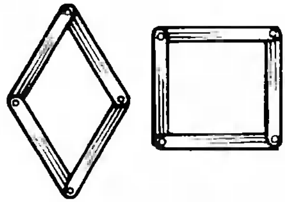


Рис. 132

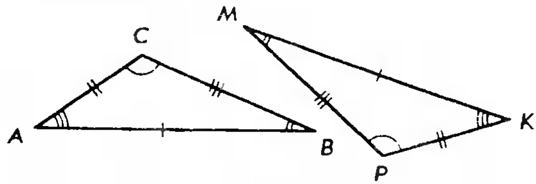


Рис. 133

1. *Треугольники можно назвать равными, если стороны одного из них соответственно равны сторонам другого.*

2. *В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные друг другу углы* (рис. 133).

Первый из этих выводов является определением равенства треугольников, второй — первой теоремой о треугольниках.

Итак, даем такое определение: **два треугольника называются равными, если стороны одного из них соответственно равны сторонам другого.**

Отметим, что равенство треугольников, как и равенство углов, мы определили через равенство отрезков. Позднее через равенство отрезков определится и равенство любых фигур.

Часто, определяя равенство треугольников, говорят и о равенстве углов, а не только сторон. Но равенство углов в равных треугольниках следует из равенства сторон. Об этом уже было сказано, но это нам еще предстоит доказать.

4.7. Теоремы и доказательства. В предыдущем пункте мы, исходя из опыта (мысленно поставленного), сделали вывод о том, что в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные друг другу углы. Но это утверждение мы можем доказать и не ссылаясь на поставленный опыт (да его и не всегда можно поставить, если треугольники очень большие или если один находится на Земле, а другой — на Луне).

Что же мы понимаем под словом «доказать»? Поясним это.

В геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Все дальнейшие утверждения получают путем рассуждений. Эти рассуждения называют **доказательством**. В результате доказательства становится ясным, что высказанное утверждение верно. (Так и в детективном романе сыщик, например Шерлок Холмс, собирая улики и делая из них выводы, выясняет, кто совершил преступление.)

Само **утверждение, которое доказывается, называют теоремой.**

Геометрия состоит главным образом из теорем и их доказательств. То, что говорится без доказательства, кроме аксиом, это еще не геометрия, а отдельные сведения по геометрии.

Мы уже доказали некоторые теоремы, например теорему о равенстве вертикальных углов. Теперь начнем доказывать теоремы о треугольниках. Если вы верно ответили на вопрос о том, почему равны углы «каркасного» треугольника углам треугольников ABC и KMP, заданный в предыдущем пункте, то вы уже доказали первую теорему о треугольниках. Если вы этого не сделали, то сделаем это вместе в п. 4.8. Там же мы расскажем о том, как устроено утверждение теоремы, и о том, как ведется ее доказательство.

4.8. Равенство углов равных треугольников

ТЕОРЕМА 1. Если два треугольника равны, то их соответственные углы равны.

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Будем считать, что равны такие пары сторон этих треугольников: $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 134). Соответственными углами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ будут углы, лежащие против равных сторон, т. е. углу A соответствует угол A_1, углу B — угол B_1, углу C — угол C_1. Нам предстоит доказать их равенство, т. е. что $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$.

Рассмотрим углы A_1 и A. Продолжим стороны треугольников за точки B_1, C_1 и B, C (рис. 135). Мы видим два угла: $\angle A_1$ и $\angle A$, на сторонах которых отложим равные отрезки: $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = AC$.

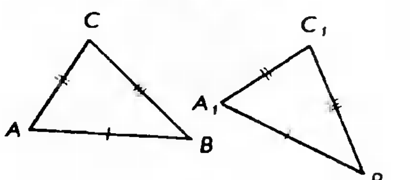


Рис. 134

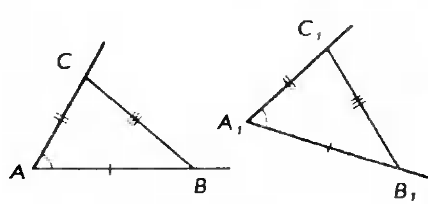


Рис. 135

Концы этих отрезков соединены отрезками B_1C_1 и BC. По условию теоремы они тоже равны: $B_1C_1 = BC$. Тогда, по определению равенства углов, углы A_1 и A равны.

Совершенно так же убедимся, что $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle C_1 = \angle C$. Теорема доказана.

А как вам убедиться, что вы поняли доказательство теоремы и можете его рассказать? Начинайте с формулировки. Разграничьте условие теоремы и ее заключение. Условие теоремы — это то, что дано. Оно начинается обычно со слова «если». Заключение теоремы — это то, что надо доказать. Оно начинается чаще всего со слова «то». По условию теоремы сделайте рисунок (размерами побольше). Фигуры, данные в условии, обозначьте буквами. Запишите кратко, что дано. В этой теореме запись данных такая:

Дано:
$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$.

Запишите кратко, что надо доказать. В этой теореме запись такая:

Доказать: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$.

Отметьте данные условными значками на рисунке. Здесь равные отрезки отметьте одинаковым числом черточек. Запишите кратко доказательство. Для теоремы 1 это можно сделать так:

Доказательство:

Что утверждается	Из чего следует
1. $A_1B_1 = AB$	Из условия теоремы
2. $A_1C_1 = AC$	Из условия теоремы
3. $B_1C_1 = BC$	Из условия теоремы
4. $\angle A_1 = \angle A$	Из определения равных углов

Формулировку теоремы, ее краткую запись и краткое доказательство проговорите вслух (если нужно, то и не один раз). При этом фигуры, которые вы называете в этом рассказе, указывайте на рисунке. Попытайтесь весь свой ответ повторить еще и «про себя». Будет совсем хорошо, если вы сможете провести доказательство теоремы с иным, чем в книге, рисунком и с другими обозначениями. Например, повторите доказательство теоремы 1 для треугольников, расположенных как-то иначе и названных ABC и KMP.

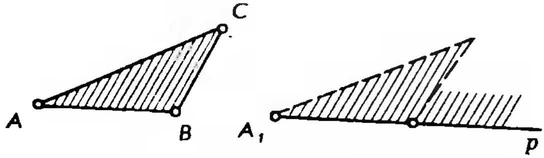


Рис. 136

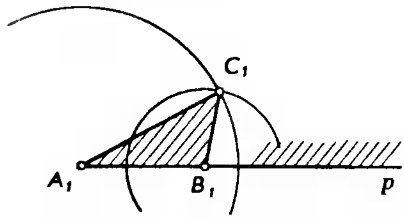


Рис. 137

4.9. Построение треугольника, равного данному, в заданном месте. Построить треугольник, равный данному, — задача несколько неопределенная, так как такой треугольник можно строить в разных положениях. Поэтому поставим задачу более точно.

Пусть задан треугольник ABC. Требуется построить такой треугольник, равный треугольнику ABC, одна из вершин которого, соответствующая вершине A, лежала бы в заданной точке A_1; сторона, равная стороне AB, лежала бы на заданном луче p с началом в точке A_1 и, наконец, вершина, соответствующая вершине C, лежала бы с заданной стороны от луча p (рис. 136).

Так как мы строим треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, то должны выполняться равенства: $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. Поэтому сначала на луче p от точки A_1 отложим отрезок $A_1B_1 = AB$. Затем построим две окружности: одну с центром в точке A_1 и радиусом AC, а другую с центром B_1 и радиусом BC (рис. 137). Эти окружности пересекутся в двух точках с разных сторон от луча p (точнее, от прямой, на которой лежит луч p). Та из этих точек, которая лежит с заданной стороны от p, и будет третьей вершиной C_1 строящегося треугольника. Соединив ее с точками A_1 и B_1 отрезками A_1C_1 и B_1C_1, получим искомый треугольник $A_1B_1C_1$; его стороны равны сторонам треугольника ABC.

Решив эту задачу, мы фактически выполнили построение треугольника по трем заданным сторонам. Такие построения

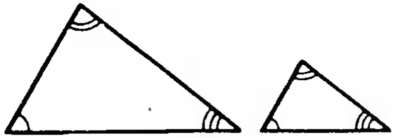


Рис. 138

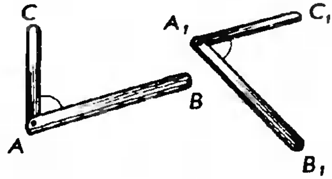


Рис. 139

выполняют реально, когда собирают металлические конструкции (например, фермы мостов, каркасы зданий и высотных башен и т. п.).

Сторонами строящихся каркасных треугольников в этих случаях служат балки заданной длины.

4.10. Признаки равенства треугольников. В дальнейшем при решении задач и доказательствах теорем очень важно увидеть, распознать равные треугольники. И не только их увидеть, но и доказать, что они равны. Хорошо, если вы знаете, что стороны в рассматриваемых треугольниках соответственно равны. Тогда треугольники равны по определению. А если это не известно? Тогда применяют признаки равенства треугольников.

В математике *признаки* вам уже встречались (например, признаки делимости). Да и в других науках признаки играют важную роль: в зоологии, ботанике, химии, признаки болезней в медицине и т. п. Давайте поищем признаки равенства треугольников.

Если в двух треугольниках нет равных сторон, то равны они быть не могут, даже если у этих треугольников равны углы (рис. 138). Поэтому будем предполагать, что у двух треугольников равны какие-то стороны. Возможны два случая.

1. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ две пары равных сторон. Например, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$.

2. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ одна пара равных сторон: $A_1B_1 = AB$.

Рассмотрим сначала первый случай. Представим себе отрезки AB, AC и A_1B_1, A_1C_1 в виде реек, скрепленных в точках A и A_1 (рис. 139), причем углы между рейками равны. А если можно совместить рейки AB, AC и A_1B_1, A_1C_1, то можно совместить и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. эти треугольники равны.

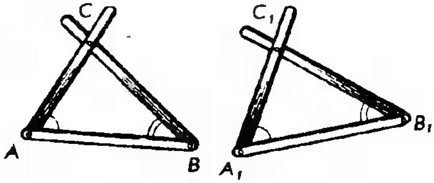


Рис. 140

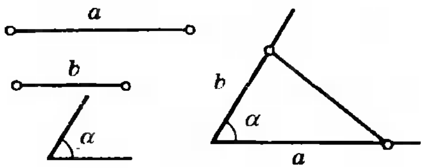


Рис. 141

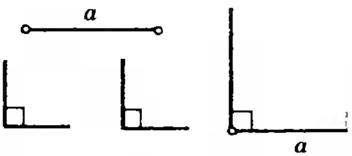


Рис. 142

И мы с вами нашли **первый признак равенства треугольников: если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Рассмотрим теперь второй случай: для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняется равенство $A_1B_1 = AB$. Снова представим себе отрезки AB и A_1B_1 в виде реек (рис. 140), а лучи AC, BC и A_1C_1, B_1C_1 — в виде длинных пересекающихся реек. Снова ясно, что для того, чтобы эти конструкции из реек можно было совместить, нужно потребовать равенство углов: $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle B_1 = \angle B$. А это приводит ко **второму признаку равенства треугольников: если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам второго треугольника, то такие треугольники равны.**

Из двух признаков равенства треугольников важнее первый: он применяется значительно чаще. Соответствующая ему задача на построение (построить треугольник по двум сторонам и углу между ними) всегда имеет решение (рис. 141).

Второй признак применяется реже, а если постараться, то без него и вообще можно было бы обойтись. И построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам возможно не всегда. Например, нельзя, если оба угла — прямые (рис. 142).

Мы с вами нашли два признака равенства треугольников. Но мы их еще не доказали. Это мы сделаем далее. Гениальный итальянский художник, скульптор, механик и математик

Леонардо да Винчи (1452 — 1519) говорил: «Никакое человеческое исследование не может считаться истинной наукой, пока оно не прошло через математическое доказательство». Прислушаемся к его словам.

4.11. Доказательства признаков равенства треугольников

ТЕОРЕМА 2. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $\angle A_1 = \angle A$ (рис. 143).

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.

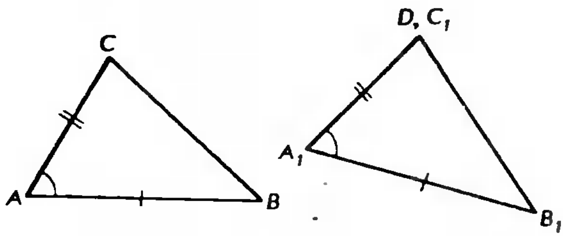


Рис. 143

Доказательство. Чтобы доказать теорему, мы должны доказать равенство: $B_1C_1 = BC$.

Для этого на отрезке A_1B_1 с той стороны от прямой A_1B_1, где лежит точка C_1, построим треугольник A_1B_1D, равный треугольнику ABC. Как это сделать, рассказано в п. 4.9. Выполним это построение так, что $A_1D = AC$ и $B_1D = BC$. Докажем, что точка D совпадает с точкой C_1.

Так как $\Delta A_1B_1D = \Delta ABC$, то $\angle DA_1B_1 = \angle A$ (по теореме 1). Так как, по условию, $\angle A_1 = \angle A$, то $\angle DA_1B_1 = \angle A_1$. Из аксиомы откладывания угла вытекает, что точка D лежит на луче A_1C_1.

Далее, $A_1D = AC$ и $AC = A_1C_1$. Значит, $A_1D = A_1C_1$. Из аксиомы откладывания отрезка вытекает, что точка D совпадает с точкой C_1. Поэтому B_1D и B_1C_1 — это один и тот же отрезок. А так как $B_1D = BC$, то и $B_1C_1 = BC$.

Итак, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ (рис. 144).

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.

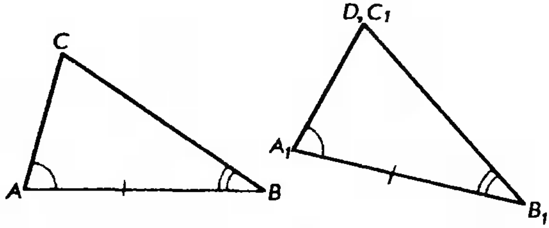


Рис. 144

Доказательство. Чтобы доказать теорему, установим равенства: $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$. Для этого на отрезке A_1B_1 с той стороны от прямой A_1B_1, где лежит точка C_1, построим треугольник A_1B_1D, равный треугольнику ABC. Выполним это построение так, что $A_1D = AC$ и $B_1D = BC$.

Докажем, что точка D совпадает с точкой C_1. Так как $\Delta A_1B_1D = \Delta ABC$, то $\angle DA_1B_1 = \angle A_1$. Из аксиомы откладывания угла вытекает, что точка D лежит на луче A_1C_1. Точно так же рассуждая, получим, что точка D лежит на луче B_1C_1. Поэтому точка D является точкой пересечения лучей A_1C_1 и B_1C_1, т. е. точка D совпадает с точкой C_1.

Из этого следует, что отрезки A_1D и A_1C_1 совпадают. А так как $A_1D = AC$, то и $A_1C_1 = AC$. Точно так же доказывается равенство $B_1C_1 = BC$.

Итак, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$. Теорема доказана.

4.12. Тетраэдр. Треугольник — простейший из многоугольников. У него всего три угла и три стороны. Так что в слове «многоугольник» (интересно, а почему не «многосторонник», ведь сторон столько же, сколько и углов?) «много» означает не меньше трех. А каким может быть «много» для многогранника? Сколько может быть граней у многогранника?

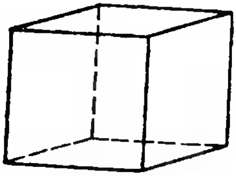


Рис. 145

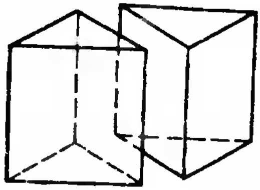


Рис. 146

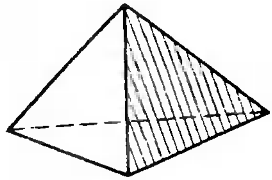


Рис. 147

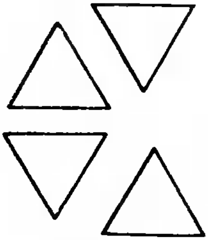


Рис. 148

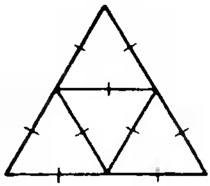


Рис. 149

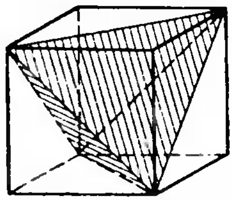


Рис. 150

Самый знакомый вам многогранник — это куб (рис. 145). У него шесть граней. Если его разрезать пополам (рис. 146), то получится две **треугольные призмы**, у которых по пять граней. Но еще меньше граней у треугольной пирамиды (рис. 147). Их всего четыре. Поэтому такая пирамида еще называется **тетраэдром**, что в переводе с греческого и означает «четырехгранник» («тетра» — четыре). Меньше четырех граней у многогранников не бывает. Тетраэдр — самый простой из многогранников, как треугольник — из многоугольников. Поэтому их еще называют **симплексами**, т. е. простейшими. Отрезок — тоже симплекс (одномерный). Треугольник — двумерный симплекс. Тетраэдр — трехмерный симплекс. Подумайте о размерности симплексов — что она означает?

Элементы многогранника — это его **вершины, ребра** и **грани**. У тетраэдра четыре вершины и шесть ребер, соединяющих каждые две вершины. Каждая грань тетраэдра — это треугольник. Если все ребра тетраэдра равны друг другу, то гранями тетраэдра будут равносторонние и равные друг другу треугольники. Такой тетраэдр называется **правильным**.

Правильный тетраэдр легко склеить из четырех одинаковых равносторонних (правильных) треугольников (рис. 148) или даже из одного правильного треугольника, сгибая его по отрезкам, соединяющим середины сторон (рис. 149). Почему возможно такое построение (т. е. почему эти отрезки равны половинам сторон исходного треугольника), будет доказано позднее.

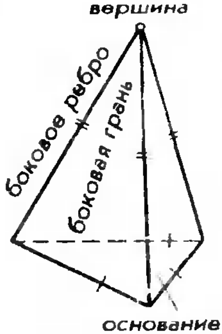


Рис. 151

Ребрами правильного тетраэдра будут и непараллельные диагонали противоположных граней куба (рис. 150).

Из тетраэдров выделим еще **правильные треугольные пирамиды**. У этих пирамид одна грань — правильный треугольник (она называется **основанием правильной пирамиды**), а три остальные грани — равные друг другу равнобедренные треугольники, основаниями которых служат стороны основания пирамиды (рис. 151). Их общая вершина называется **вершиной правильной пирамиды**, сами они называются ее **боковыми гранями**, а их боковые стороны — **боковыми ребрами** правильной пирамиды.

Комментарий

Симплекс и комплекс — однокоренные слова, происходящие от латинского слова «plexus» — сплетение, соединение. Интересно, что приставки *сим-* и *ком-* имеют схожие значения (с, вместе). Сравните, например, слова: *сим*фония — согласие звуков, совместное звучание; *сим*патия — сострадание, сочувствие, *сим*метрия — соразмерность, *сим*птом — признак, предвестник, *ком*позиция — составление рисунка (произведения) из отдельных частей, *ком*пот — напиток, составленный из фруктов, *ком*пактный — тесно упакованный.

4.13. Размышления об истине и о доказательстве. В этом параграфе мы доказали первые теоремы. Как мы уже говорили, доказательство теорем — это главное в геометрии. Но умение доказать справедливость своих утверждений, свою правоту важно не только в геометрии.

Разворачиваясь в строгой системе точных понятий и выводов, геометрия дает представление о строго установленной истине, о заключенной в ней необходимости, так что ее нельзя ни изменить, ни подделать, ни обойти. Так геометрия воспитывает уважение к истине, воспитывает стремление доказывать то, что утверждается в качестве истины...

В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент. В простейшей, но очень важной форме он состоит в том, чтобы не судить без доказательства, не поддаваться впечатлениям, настроениям и наветам там, где нужно разобраться в фактах.

Научная преданность истине и состоит в стремлении основывать свои убеждения в любом вопросе на наблюдениях и выводах настолько объективных, настолько не поддающихся посторонним впечатлениям, предвзятым мнениям и порывам темперамента, насколько это только доступно человеку. Утверждение считается верным, если оно доказано. На первых порах доказательство — это постепенный переход от неочевидных утверждений к очевидным или уже известным.

Умение доказывать Аристотель (384—322 гг. до н. э.) считал самой характерной чертой человека. «Не может не быть позорным бессилие помочь себе словом»,— писал Аристотель в «Риторике».

Однако в математику доказательство вошло не сразу: по-видимому, еще Демокрит, живший в V—IV вв. до н. э., обходился без доказательства. В IV в. до н. э. логика завоевывает математику.

В Древней Греции были найдены методы математических доказательств, которые превратили математику в строгую абстрактную науку, чем она с тех пор и выделяется среди всех других наук. В математике нельзя сослаться на результаты опыта, эксперимента. Математика требует доказательства ее утверждений исходя из основных понятий. Уровень строгости математических доказательств и построения математической теории, достигнутый греками, был превзойден только во второй половине XIX в. «Начала» Евклида служили образцом и остаются прототипом строгого изложения математической теории.

Хотелось бы предостеречь вас от заучивания доказательств теорем без их понимания. Некоторые доказательства сначала могут показаться вам трудными, запомнить их будет тоже нелегко. На первых порах это вас не должно тревожить. Главное — знайте, что полезно просто разбирать доказательство, стараться его понять. Пусть их будет много: чем с большим числом доказательств вы познакомитесь, тем лучше. Через некоторое время вы заметите, что ваши рассуждения (и не только в геометрии) примут красивую, логически строгую, стройную форму. А доказательства тех теорем, которые вначале казались сложными, станут для вас простыми и естественными.

§ 5. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Вы уже, наверное, обратили внимание на свойства равнобедренного треугольника. Например, рассматривая рис. 123 — 125, вы, по-видимому, заметили, что в одном и том же треугольнике, а именно в равнобедренном, один и тот же отрезок назван сначала медианой, затем биссектрисой и наконец высотой. Вы заметили, наверное, также, что этот отрезок разбивает равнобедренный треугольник на два равных треугольника, а потому углы при основании равнобедренного треугольника равны. Обо всех этих важных свойствах равнобедренного треугольника и о многом другом, связанном с этими свойствами, и пойдет речь в этом параграфе.

5.1. Свойства равнобедренного треугольника. Напомним, что треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны. Эти стороны называются его боковыми сторонами, а третья сторона — основанием (см. рис. 111). Когда говорят «вершина равнобедренного треугольника», то имеют в виду общую точку его равных сторон.

Равнобедренные треугольники часто встречаются в жизни. Например, дом с двускатной крышей выглядит с торцевой стороны как пятиугольник, составленный из прямоугольника и равнобедренного треугольника (рис. 152). Крышу поддерживают стропила. Каждая их пара одинаковой длины скрепляется с горизонтальной балкой, так что вместе они образуют стороны равнобедренного треугольника с горизонтальным основанием (рис. 153).

Теперь давайте перечислим те свойства равнобедренного треугольника, которые мы заметили, разглядывая рисунки.

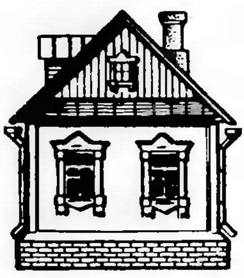


Рис. 152

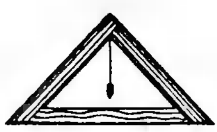


Рис. 153

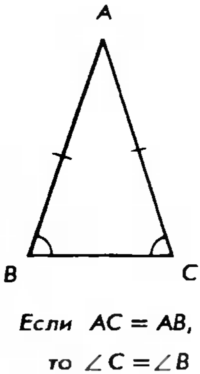


Рис. 154

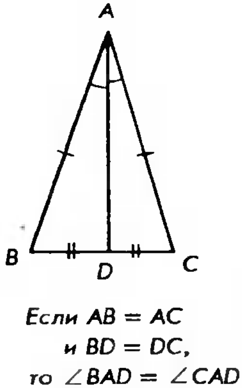


Рис. 155

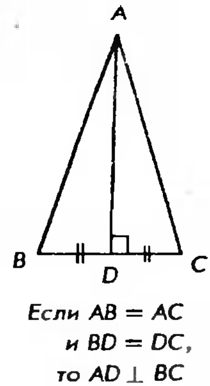


Рис. 156

Свойство 1. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны* (рис. 154).

Свойство 2. *В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из вершины, является биссектрисой* (рис. 155).

Свойство 3. *В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из вершины, является высотой* (рис. 156).

Как видите, каждое из этих свойств является отдельной теоремой. Например, первое свойство в виде теоремы формулируется так: *если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны.* Дайте аналогичные формулировки второму и третьему свойствам. Нам предстоит доказать эти теоремы. Но в их доказательствах много общего, и потому все их удобно свести в одну теорему о свойствах равнобедренного треугольника.

ТЕОРЕМА 4. В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, проведенная из вершины, является биссектрисой и высотой.

Дано: ΔABC, $AB = AC$, AD — медиана.

Доказать: 1) $\angle B = \angle C$; 2) AD — биссектриса; 3) AD — высота (рис. 157).

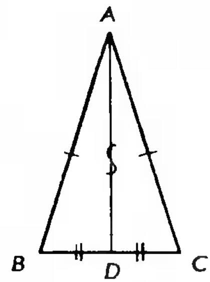


Рис. 157

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABD и ACD. В них по условию $AB = AC$, $BD = CD$ (так как AD — медиана) и сторона AD — общая. По определению, $\Delta ABD = \Delta ACD$. Но тогда углы этих треугольников соответственно равны (по теореме 1).

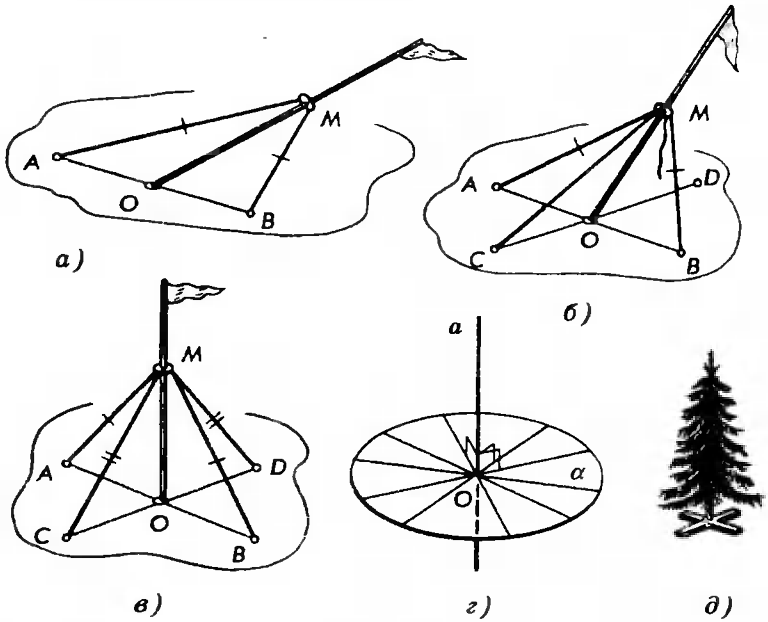


Рис. 158

Поэтому: 1) $\angle B = \angle C$; 2) $\angle BAD = \angle CAD$; 3) $\angle ADB = \angle ADC$.

Первое равенство означает, что доказано первое утверждение теоремы. Второе равенство означает, что AD — биссектриса. Третье равенство означает, что $AD \perp BC$. Следовательно, AD — высота. Все утверждения теоремы доказаны.

З а м е ч а н и е. (О перпендикулярности прямой и плоскости.) Расскажем сначала об одном практическом применении полученных нами свойств равнобедренного треугольника. Допустим, нам надо установить вертикально мачту MO, лежащую на земле (рис. 158, *а*). Точка O — основание мачты. Прикрепим к ней растяжки MA и MB равной длины так, чтобы точка O оказалась серединой отрезка AB. Получится равнобедренный треугольник MAB, боковыми сторонами которого являются натянутые растяжки MA и MB. Сама мачта MO, упираясь в основание треугольника посередине, оказывается перпендикулярной основанию AB. Прикрепим к мачте в точке M еще две пары растяжек и поднимем ее, повернув треугольник MAB вокруг его основания AB (рис. 158, *б*). Теперь закрепим мачту MO второй парой равных растяжек MC и MD так, чтобы снова точка O оказалась серединой — в данном случае отрезка CD (пересекающего отрезок AB, рис. 158, *в*).

Мачта MO будет перпендикулярна и к отрезку CD. Эти две перпендикулярности ($MO \perp AB$ и $MO \perp CD$) обеспечат вертикальность мачты — перпендикулярность ее горизонтальной плоскости. Тогда окажется, что мачта MO перпендикулярна любой прямой, лежащей в горизонтальной плоскости и проходящей через точку O. Именно о таких прямой и плоскости говорят, что они взаимно перпендикулярны. Итак, рассказ об установке мачты привел нас к важному понятию перпендикулярности прямой и плоскости. Вот как определяется это понятие.

Плоскость α и пересекающая ее в точке O прямая a называются взаимно перпендикулярными, если a перпендикулярна любой прямой, которая лежит в плоскости α и проходит через точку O (рис. 158, *г*). В этом случае говорят также, что **прямая a перпендикулярна плоскости α**, и пишут $a \perp \alpha$.

А рассуждение об установке вертикальной мачты подсказывает нам, что прямая окажется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Вспомните, как устанавливают новогоднюю елку с помощью креста (рис. 158, *д*).

5.2. Срединный перпендикуляр. Если вы снова вернетесь к рис. 154 — 157 и поищете, что общего в этих рисунках, то, наверное, обнаружите, что на каждом из них имеется отрезок и перпендикуляр к нему, проведенный через середину этого отрезка. Такая ситуация очень часто будет встречаться и в дальнейшем, и удобно ввести для нее специальный термин. А именно, назовем **срединным перпендикуляром отрезка прямую, перпендикулярную этому отрезку и пересекающую его в середине** (рис. 159). Точки срединного перпендикуляра обладают важным свойством (см. теорему 5).

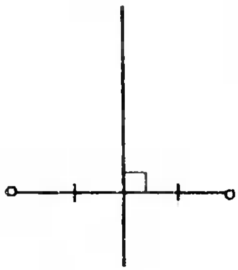


Рис. 159

ТЕОРЕМА 5. *(О серединном перпендикуляре.)* **Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.**

Дано: отрезок AB, прямая p, MC — серединный перпендикуляр отрезка AB, точка M — точка прямой p (рис. 160).

Доказать: $MA = MB$.

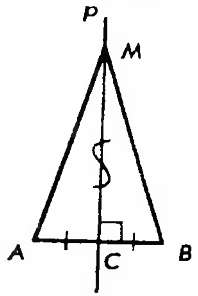


Рис. 160

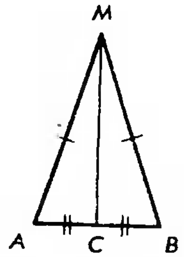


Рис. 161

Доказательство. Прямая p пересекает отрезок AB в его середине — точке C. Треугольники MAC и MBC — прямоугольные. В этих треугольниках $AC = BC$, так как C — середина AB. Сторона MC у них общая и $\angle MCA = \angle MCB$, так как эти углы прямые. Поэтому $\Delta\, MAC = \Delta\, MBC$ (по первому признаку). Следовательно, их соответственные стороны MA и MB равны. Теорема доказана.

Верно и такое утверждение: *если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.*

Действительно, если $MA = MB$ (рис. 161), то треугольник MAB — равнобедренный. Тогда (по теореме 4) медиана MC этого треугольника является его высотой. Следовательно, отрезок MC, а значит, и точка M лежат на серединном перпендикуляре отрезка AB.

5.3. Взаимно обратные утверждения. В знаменитой книге «Алиса в Стране чудес», написанной Льюисом Кэрроллом, между участниками «безумного чаепития» (так называется одна из глав книги) происходит такой разговор.

«— Так бы и сказала,— заметил Мартовский Заяц.— Нужно *всегда говорить то, что думаешь.*

— Я так и делаю,— поспешила объяснить Алиса.— По крайней мере... По крайней мере, я *всегда думаю то, что говорю...* а это одно и то же...

— Совсем не одно и то же,— возразил Болванщик.— Так ты еще чего доброго скажешь, будто *«Я вижу то, что ем»* и *«Я ем то, что вижу»*— одно и то же!

— Так ты еще скажешь, будто *«Что имею, то люблю»* и *«Что люблю, то имею»* — одно и то же!— подхватил Мартовский Заяц.

— Так ты еще скажешь,— проговорила, не открывая глаз Соня,— будто *«Я дышу, пока сплю»* и *«Я сплю, пока дышу»*— одно и то же!»

В этом отрывке несколько пар взаимно обратных утверждений (они выделены одинаково). Если вы сравните два утверждения в каждой паре, то заметите, что они устроены так: исходное положение (условие) первого является заключением второго, и наоборот: условие второго — это заключение первого. И все участники «безумного чаепития» объясняют Алисе, что утверждение и ему обратное — это не одно и то же. Одно из них может быть истинным, а другое — нет. Но могут быть истинными и оба. Вот простейший пример: «Если отрезки равны, то длины их равны» и «Если длины отрезков равны, то отрезки равны».

Не случайно в книге про Алису встретились взаимно обратные утверждения. Льюис Кэрролл — литературный псевдоним английского математика Чарлза Доджсона (1832 — 1898). В приведенном отрывке из его книги образно показано, что истинность каждого из взаимно обратных утверждений должна доказываться отдельно. Одно из другого не следует.

Мы только что доказали истинность двух важных взаимно обратных утверждений: 1) *если точка принадлежит серединному перпендикуляру отрезка, то она равноудалена от концов этого отрезка*; 2) *если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка*. В тех случаях, когда верны оба взаимно обратных утверждения, их часто для краткости объединяют оборотом **«тогда и только тогда»**. Значит, наши два утверждения могут быть короче сформулированы так: **точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на его серединном перпендикуляре.**

Потренируйтесь в составлении взаимно обратных утверждений и проверке их истинности. Возьмите, например, три утверждения теоремы 4 о свойствах равнобедренного треугольника, составьте обратные им утверждения и проверьте их истинность.

Или вот еще пример. Доказана теорема 1 о том, что в равных треугольниках соответственные углы равны. Верно ли обратное ей утверждение: если в двух треугольниках соответственные углы равны, то треугольники равны?

Подумайте над истинностью этого утверждения. Если вы считаете, что оно истинно, то докажите его. Если же нет, то для опровержения его достаточно привести хотя бы один пример, в котором условие утверждения выполняется, а заключение — нет.

Комментарий

Несколько слов о доказательстве и опровержении различных утверждений. Обычно формулируемые в математике (и в геометрии в частности) утверждения относятся ко всем объектам одного типа.

Например, если мы говорим: «Вертикальные углы равны», то имеем в виду, что это свойство выполняется для каждой пары вертикальных углов, а не для каких-нибудь двух конкретных вертикальных углов.

Если мы говорим, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, совпадает с высотой, то опять понимаем, что где бы мы ни начертили равнобедренный треугольник и какой бы равнобедренный треугольник ни взяли, это свойство будет выполняться всегда.

Конечно, если бы мы формулировали утверждение для какого-нибудь конкретного объекта (в нашем случае — треугольника), нам не нужно было бы ничего доказывать, достаточно было бы только проверить (измерением или сравнением, например), что это утверждение для этого треугольника выполняется. Но проверить свойство для всех возможных треугольников не в наших силах, и потому приходится проводить такие рассуждения-доказательства, которые верны для каждого треугольника.

Если же сформулированное утверждение кажется нам неправдоподобным и мы хотим его опровергнуть, то нам достаточно показать, что оно выполняется не для всех рассматриваемых объектов, т. е. можно найти такой объект, для которого это утверждение не выполняется. Поэтому достаточно привести опровергающий пример. Например, для опровержения утверждения: «Если углы равны, то они вертикальные» — достаточно предъявить два равных между собой угла, не являющихся вертикальными.

5.4. Признаки равнобедренного треугольника. В теореме 4 о свойствах равнобедренного треугольника три утверждения. Для каждого из них можно сформулировать обратное утверждение. Сделав это, вы получите три утверждения, в которых заключения будут звучать одинаково: «... то треугольник — равнобедренный». Следовательно, все эти три утверждения будут признаками равнобедренного треугольника. Мы докажем первый из них. Доказательство достаточно сложно.

ТЕОРЕМА 6. **Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.**

Д а н о: $\triangle ABC$, $\angle B = \angle C$.

Д о к а з а т ь: $AB = AC$.

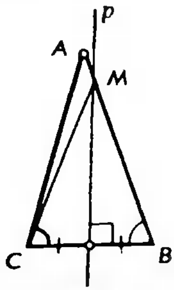


Рис. 162

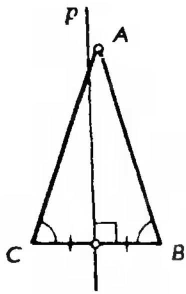


Рис. 163

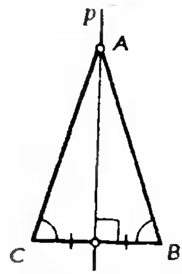


Рис. 164

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка D — середина отрезка BC, а прямая p — серединный перпендикуляр BC. Мыслимы лишь три возможности: 1) p пересекает AB (рис. 162); 2) p пересекает AC (рис. 163); 3) p проходит через A (рис. 164). Докажем, что два первых случая невозможны. Этим мы установим, что точка A лежит на прямой p.

Рассмотрим первый случай (см. рис. 162). Пусть прямая p пересекает AB в точке M. Поскольку точка M лежит на серединном перпендикуляре отрезка BC, то $MB = MC$. Следовательно, $\triangle MBC$ — равнобедренный. А тогда равны его углы при основании: $\angle MCB = \angle B$. Так как $\angle B = \angle C$ (по условию), то $\angle MCB = \angle C$. А это невозможно, так как $\angle MCB$ меньше $\angle C$. Такой результат мы получили, допустив, что M лежит внутри AB. Значит, первый случай невозможен.

Точно так же не может быть, чтобы точка M лежала внутри AC (проведите соответствующие рассуждения самостоятельно). Остается третий случай: прямая p проходит через точку A. И так как A лежит на серединном перпендикуляре отрезка BC, то $AB = AC$. Теорема доказана.

Поищите еще признаки равнобедренного треугольника. Вы это уже можете сделать.

Комментарий

Поговорим еще о признаках и свойствах различных фигур.

Что такое свойство фигуры (предмета, явления),— понятно: мяч — круглый, лед — холодный, мед — сладкий, смежные углы составляют развернутый, углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Здесь мы перечислили некоторые свойства предметов и геометрических фигур. На математическом языке эти свойства могут быть сформулированы так:

если предмет — мяч, то он круглый;

если вещество — лед, то оно холодное;

если треугольник равнобедренный, а его углы прилежат к основанию, то эти углы равны. И т. д.

Когда мы говорим о свойствах, то, конечно же, понимаем, свойства каких фигур мы рассматриваем. А потому в формулировке теоремы о свойстве, например, равнобедренного треугольника этот треугольник дан, а сама теорема начинается со слов: «Если треугольник равнобедренный, то...»

С признаками различных явлений мы тоже встречаемся часто. Например, если летним вечером комары «толкутся» стайками — быть завтра теплой погоде (это признак хорошей погоды). Если у малыша на лице сыпь, а в нижней части лица — белое пятно треугольной формы, значит у ребенка скарлатина (это признак скарлатины).

Мы понимаем, что найти признак какой-либо болезни — значит понять, как ее можно распознать среди других болезней. Так и в геометрии: найти признак равенства треугольников — значит узнать, в каком случае они равны; найти признак равнобедренного треугольника — значит суметь распознать его среди других треугольников. Поэтому формулировка признака равнобедренного треугольника звучит так: «Если... то треугольник равнобедренный».

Теперь сравним способ построения теорем о свойствах и признаках одних и тех же фигур. Заметим, что если вместо многоточий в приведенных формулировках вставить одинаковые слова, то получим два взаимно обратных утверждения. (Кстати, совсем не обязательно оба они будут верными. Например, *свойство* вертикальных углов: «Если углы вертикальные, то они равны»,— верно, а *признак*: «Если углы равны, то они вертикальные»,— конечно же, неверен.)

А теперь давайте посмотрим внимательно на какое-нибудь определение, например на определение равнобедренного треугольника: «Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны». В соответствии с этим определением если две стороны треугольника равны, то он равнобедренный, и наоборот: если треугольник равнобедренный, то какие-то две его стороны равны.

Это означает, что определение содержит в себе и признак равнобедренного треугольника, и его свойство. Отметим также, что это верно для любого определения (обратитесь к какому-нибудь определению и убедитесь, что в нем содержатся и признак, и свойство определяемого объекта).

5.5. Деление отрезка пополам и построение перпендикуляра. Чтобы провести медиану треугольника, надо сначала разделить его сторону пополам. Чтобы провести высоту, надо провести на прямую перпендикуляр из точки, не лежащей на этой прямой, или, как говорят, опустить из точки перпендикуляр на данную прямую.

Скорее всего вы делили отрезок пополам, используя линейку с делениями (и тем самым решали задачу приближенно). А перпендикуляр опускали из точки на прямую с помощью чертежного треугольника. Но если этих инструментов у вас нет, а есть лишь классические инструменты геометрии — циркуль и линейка без делений? (О том, почему выбирают именно эти инструменты, мы уже говорили в п. 2.5.)

Вспомнив свойства равнобедренного треугольника и серединного перпендикуляра и обратившись к рис. 154 — 161, сопровождающим их доказательства, вы сможете придумать несколько решений задач о делении отрезка пополам и о проведении перпендикуляра. Сделайте это, а затем сравните ваши решения с теми, которые приводятся в учебнике.

Задача 1. *Разделить отрезок пополам.*

Дано: отрезок AB.

Построить: точку C на AB такую, что $AC = BC$.

Решение. Если мы сумеем построить серединный перпендикуляр отрезка AB, то он разделит его пополам. А на

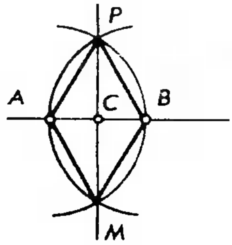


Рис. 165

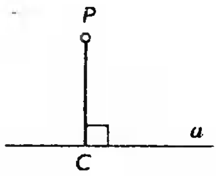


Рис. 166

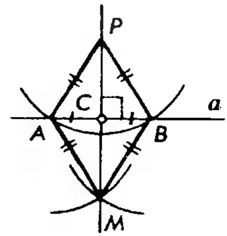


Рис. 167

серединном перпендикуляре лежат точки, равноудаленные от точек A и B. Поэтому нам надо найти две такие точки, т.е. построить два равнобедренных треугольника с общим основанием AB. Можно сделать это так.

Проведем какие-нибудь две окружности с центрами в точках A и B и одинаковыми радиусами. Радиусы надо взять достаточно большие, чтобы окружности пересеклись в точках M и P.

Например, можно взять в качестве радиуса отрезок AB (рис. 165). Так как $AM = MB$ и $AP = PB$, то прямая MP — серединный перпендикуляр отрезка AB. Поэтому он пересекает отрезок AB в середине — в точке C. Итак, $AC = CB$. Задача решена.

З а д а ч а. *Опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую, не проходящую через эту точку.*

Д а н о: прямая a и не лежащая на ней точка P (рис. 166).

П о с т р о и т ь: точку C на прямой a такую, что $PC \perp a$.

Р е ш е н и е. Если мы построим какой-нибудь равнобедренный треугольник PAB, вершина которого — точка P, а основание AB лежит на прямой a, то серединный перпендикуляр отрезка AB пересечет отрезок AB в искомой точке C. Поэтому надо провести любую окружность с центром в точке P, пересекающую прямую a в двух точках A и B. И затем построить серединный перпендикуляр отрезка AB (рис. 167). В данном случае проще всего это сделать так. Построить еще две окружности с центрами A и B и с тем же радиусом PA. Они пересекутся еще в одной точке M. Прямая PM — серединный перпендикуляр отрезка AB (почему?). Она пересечет отрезок AB в середине — в точке C. Отрезок PC и будет перпендикуляром, опущенным из точки P на прямую a. Задача решена.

Рис. 168

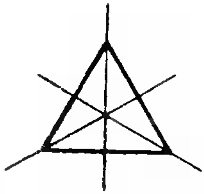


Рис. 169

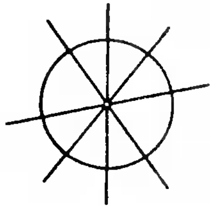


Рис. 170

Рис. 171

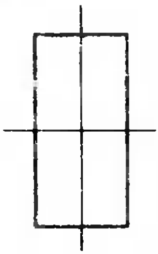


Рис. 172

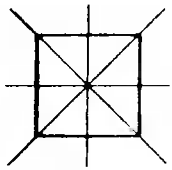


Рис. 173

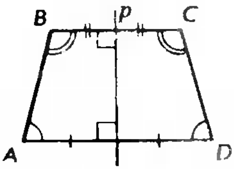


Рис. 174

5.6. Понятие об осевой симметрии. Еще одним замечательным свойством равнобедренного треугольника является его симметричность. Его **осью симметрии** является серединный перпендикуляр его основания (рис. 168). Он проходит через вершину этого треугольника, так как она равноудалена от концов основания. Поэтому на серединном перпендикуляре лежит медиана, а значит, и биссектриса, и высота, проведенные из вершины. Ось симметрии разбивает равнобедренный треугольник на две равные части, на два треугольника, лежащих по разные стороны от оси. Эти части можно мысленно совместить, как бы перегибая треугольник по оси симметрии.

Не каждая фигура имеет оси симметрии. Например, нет оси симметрии у треугольника, все стороны которого различны. Но некоторые фигуры могут иметь и больше одной оси симметрии. Так, у равностороннего треугольника три оси симметрии (рис. 169). У окружности и круга любая прямая, проходящая через их центр, является их осью симметрии (рис. 170). Ось симметрии угла — прямая, на которой лежит биссектриса угла (рис. 171), оси симметрии прямоугольника и квадрата изображены на рис. 172 и 173.

Изучая разные фигуры, мы будем указывать их оси симметрии. Чем больше у фигуры осей симметрии, тем она «правильнее».

Часто, чтобы убедиться в равенстве некоторых фигур, достаточно установить, что они симметричны относительно некоторой оси. В частности, если мы убедились, что некоторая фигура имеет ось симметрии, то в этой фигуре равны друг другу симметричные элементы. Например, в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 174), имеющем ось симметрии p, выполняются равенства: $AB = DC$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.

В пространстве аналогом осевой симметрии на плоскости является симметрия относительно некоторой плоскости. Пространственные фигуры, имеющие **плоскость симметрии**, изображены на рис. 175. С этой симметрией вы постоянно встречаетесь, глядя на себя в зеркало. Поэтому ее еще называют зеркальной симметрией.

О такой симметрии идет речь в другой книге известного уже нам Льюиса Кэрролла «Алиса в Зазеркалье».

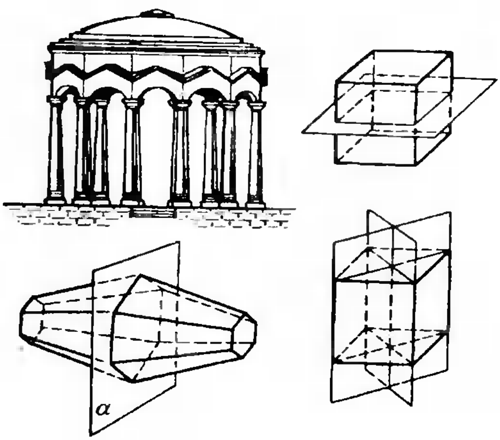


Рис. 175

5.7. О симметрии. Греческое слово «симметрия» означает соразмерность, согласованность размеров. Как и ряд других терминов геометрии, оно употребляется в различных смыслах: во-первых, как слово обиходной речи, во-вторых, как точное понятие ряда наук, прежде всего геометрии.

Как обиходное слово симметрия означает известную правильность формы тела, одинаковость его размеров. Подавляющее большинство тел, искусственно создаваемых человеком (машины, детали, дома, одежда, мебель, книги и т. п.), обладает симметрией. Симметричны планеты, орбиты планет, живые организмы, узоры орнамента, звездочки снежинок. На снежинках легче всего убедиться в симметричности кристаллов.

«Симметрия, как бы широко или узко мы ни понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек в течение веков пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство»,— писал известный немецкий математик Герман Вейль (1885—1955).

К симметрии в своем творчестве обращаются художники, скульпторы. Например, фантазия голландского художника Морица Эшера (1898—1972) создала множество самых причудливых мозаик (одна из них изображена на рис. 176). И все они иллюстрируют законы симметрии.

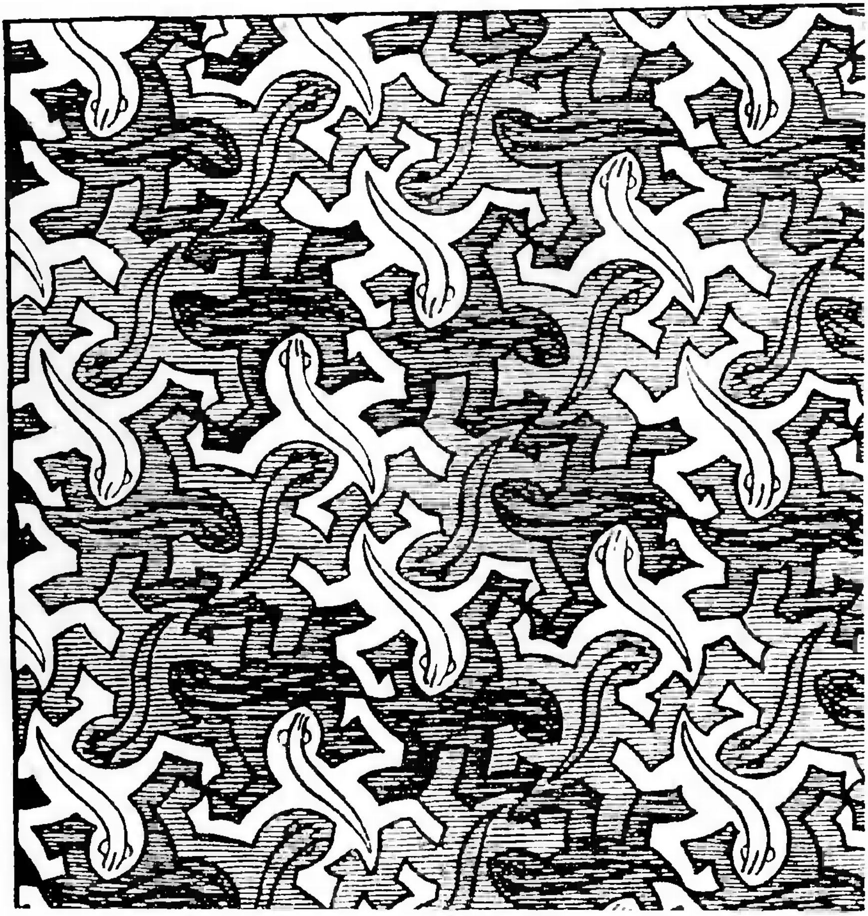


Рис. 176

Из курса математики V—VI классов вы знакомы с понятием точек, симметричных относительно прямой. Теперь вы можете сказать, что две точки *A* и *B* симметричны относительно прямой, если эта прямая является серединным перпендикуляром отрезка *AB*.

Потренируйтесь в построении фигур, имеющих одну, две, три и более осей симметрии.

§ 6. НЕРАВЕНСТВА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Все предыдущие теоремы о треугольниках были теоремами о равенствах. В теоремах этого параграфа речь пойдет о неравенствах. Например, мы докажем, что в каждом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол (рис. 177), и наоборот: против большего угла лежит и бо́льшая сторона (а потому гипотенуза больше катета — рис. 178), что сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей его стороны.

При доказательствах всех этих теорем мы следуем Евклиду (иногда дословно). Так что этот параграф является как бы отрывком из первой книги «Начал» Евклида (а всего в «Началах» 13 книг).

Все перечисленные теоремы опираются на важную теорему о внешнем угле треугольника (в «Началах» это Предложение 16). С нее мы и начнем.

6.1. Теорема о внешнем угле треугольника и ее следствия. Напомним, что внешним углом треугольника называется угол, смежный с одним из углов треугольника (рис.179).

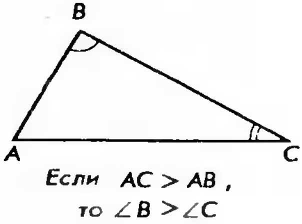


Рис. 177

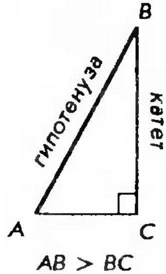


Рис. 178

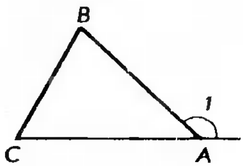


Рис. 179

ТЕОРЕМА 7. Внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника.

Дано: ΔABC, $\angle 1$ — внешний угол треугольника ABC, смежный с углом A (рис.180).

Доказать: $\angle 1 > \angle B$ и $\angle 1 > \angle C$.

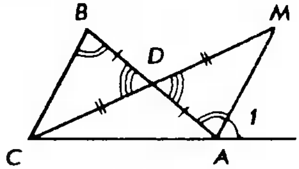


Рис. 180

Доказательство. Докажем, например, что $\angle 1 > \angle B$. Пусть точка D — середина стороны AB. Проведем медиану CD и продолжим ее на отрезок $DM = CD$. Проведем отрезок MA и рассмотрим треугольники BCD и AMD. Они равны по первому признаку равенства, так как $DC = DM$, $DA = DB$ и $\angle BDC = \angle MDA$ (как вертикальные). Поэтому $\angle B = \angle DAM$. Но $\angle DAM$ лишь часть $\angle 1$, и потому $\angle 1 > \angle DAM$. Следовательно, $\angle 1$ будет больше и $\angle B$, равного $\angle DAM$. Что $\angle 1 > \angle C$ докажите самостоятельно.

Из теоремы о внешнем угле треугольника мы получим несколько следствий. **Следствием** какой-либо теоремы называют утверждение, которое вытекает из данной теоремы непосредственно, не требуя пространного доказательства.

Следствие 1. *Сумма любых двух углов треугольника меньше развернутого угла, т. е. меньше 180°.*

Доказательство: Рассмотрим в треугольнике ABC любые два угла, например $\angle A$ и $\angle B$ (рис.181). Пусть $\angle 1$ — внешний, смежный с углом A. Тогда $\angle 1 + \angle A = 180°$ и $\angle B < \angle 1$. Поэтому $\angle B + \angle A < 180°$.

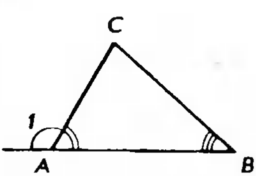


Рис. 181

В «Началах» Евклида следствие 1 является Предложением 17.

Следствие 2. *В каждом треугольнике не меньше двух острых углов.*

Доказательство. Действительно, если бы в треугольнике оказалось два неострых угла, то их сумма была бы не

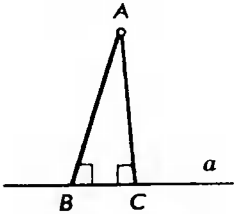


Рис. 182

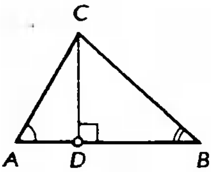


Рис. 183

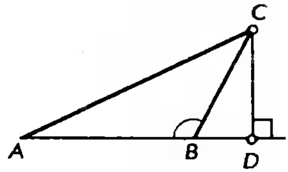


Рис. 184

меньше 180°. А это противоречит следствию 1. Следовательно, двух неострых углов в треугольнике быть не может. А значит, не менее двух углов в треугольнике — острые.

Следствие 3. *В прямоугольном треугольнике два угла — острые.*

Доказав следствия 2 и 3, мы ответили на вопрос, поставленный еще в п. 4.1: почему в треугольнике лишь один угол может быть тупым или прямым?

Следствие 4. *Из каждой точки, не лежащей на данной прямой, на эту прямую может быть опущен лишь один перпендикуляр.*

Действительно, в противном случае появился бы треугольник с двумя прямыми углами (рис. 182), что невозможно.

Следствие 5. *Высота, опущенная на ту сторону треугольника, к которой прилегают два острых угла, лежит внутри треугольника* (рис. 183). *Высота, опущенная на ту сторону треугольника, к которой прилегает тупой угол, лежит вне треугольника* (рис. 184).

Докажите это следствие самостоятельно, допустив, что эти предложения не выполняются, и получив противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника.

Обратим ваше внимание на тот метод, которым мы доказали следствия 2 и 4, а также предложили вам доказать следствие 5. Он состоит в том, что вы сначала допускаете, будто заключение теоремы неверно. А затем из этого допущения выводите, что неверным оказывается и заданное условие теоремы. Но это значит, что допустить, будто заключение теоремы неверно, нельзя. А следовательно, заключение теоремы справедливо.

Такой метод доказательства называется методом **«от противного»**. Он часто применяется в математике (вспомните, где он вам встречался). Примените его для доказательства следствия 5.

6.2. Сравнение сторон и углов треугольника. Последуем за Евклидом дальше к Предложениям 18 и 19. Это две теоремы о том, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит бóльшая сторона. Дадим слово самому Евклиду, т.е. изложим эти теоремы дословно так, как они изложены в «Началах». Вот эти теоремы.

ТЕОРЕМА 8 (*Предложение 18*). **«Во всяком треугольнике бóльшая сторона стягивает больший угол».**

Пусть будет треугольник ABC, имеющий сторону AC, бóльшую, чем AB. Я утверждаю, что и угол ABC больше угла BCA (рис. 185).

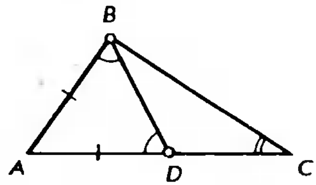


Рис. 185

Действительно, поскольку AC больше, чем AB, отложим AD, равную AB, и соединим B с D.

И поскольку в треугольнике BCD угол ADB — внешний, то он больше внутреннего ему противолежащего угла DCB (Предложение 16). Но угол ADB равен углу ABD, поскольку и сторона AB равна AD (Предложение 5; теорема 4); значит, и угол ABD больше угла ACB; значит, и подавно угол ABC больше угла ACB.

Значит, во всяком треугольнике бóльшая сторона стягивает больший угол, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 9 (*Предложение 19*). **«Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной».**

Пусть будет треугольник ABC, имеющий угол ABC, больший угла BCA. Я утверждаю, что и сторона AC больше стороны AB (рис. 186).

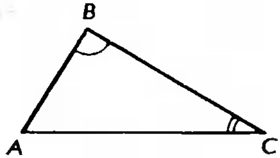


Рис. 186

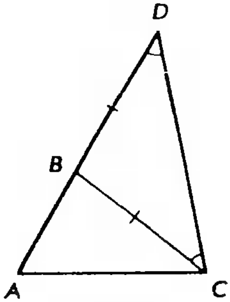


Рис. 187

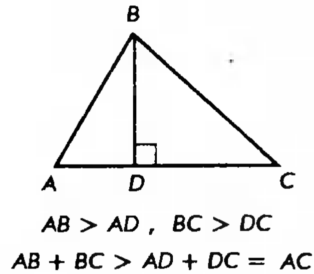


Рис. 188

Действительно, если это не так, то AC или равна AB, или меньше ее. Но теперь AC не равна AB, ибо тогда и угол ABC был бы равен углу ACB (Предложение 5; теорема 4); но он не равен ему. Значит, AC не равна AB. Но также AC и не меньше AB, ибо тогда и угол ABC был бы меньше угла ACB (Предложение 18). Но он не меньше; значит, AC не меньше AB.

Доказано уже, что AC не равна и AB; значит, AC больше AB.

Значит, во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной, что и требовалось доказать.

6.3. Неравенство треугольника. И еще одну теорему мы докажем так же, как Евклид. В «Началах» это Предложение 20.

ТЕОРЕМА 10. **Сумма двух сторон любого треугольника больше третьей его стороны.**

Дано: ΔABC.

Доказать: $AB + BC > AC$.

Доказательство. Отложим на продолжении отрезка AB отрезок $BD = BC$ и проведем отрезок CD (рис. 187). Поскольку ΔBCD равнобедренный, то $\angle D = \angle BCD$. Поэтому в треугольнике ADC угол ACD больше угла D, так как $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD$. Следовательно, в треугольнике ACD сторона $AD > AC$. Так как $AD = AB + BD$, а $BD = BC$, то $AB + BC > AC$. Теорема доказана.

В этом доказательстве мы следовали Евклиду. А на рис. 188 указана идея другого способа доказательства этой теоремы. Дополните своими рассуждениями этот рисунок. В частности, объясните, почему достаточно рассмотреть случай, когда высота BD идет внутри треугольника ABC.

Находить различные способы доказательства одной и той же теоремы, различные решения одной и той же задачи, сравнивать их, выбирать самое простое или самое красивое (что не всегда одно и то же) — интересно и очень полезно. Ведь при этом вы уже участвуете в небольшом самостоятельном исследовании, приобщаетесь к науке (не бойтесь этих высоких слов).

6.4. Расстояние от точки до фигуры. Мы переходим к важной задаче о расстоянии от точки до фигуры. Вот примеры таких задач: расстояние от корабля до берега, от туриста до шоссе и т. п. Ясно, что когда практически решают такие задачи, то всегда ищут самый короткий путь от точки до какой-нибудь точки фигуры. Например, если вам при купании в озере надо поскорее выбраться на берег, вы поплывете к берегу по самому короткому пути. Это значит, что расстояние от того места A в озере, где вы находитесь, до берега — это длина самого короткого отрезка AB из всех отрезков AX, соединяющих точку A с точками X на берегу (рис. 189, *а*).

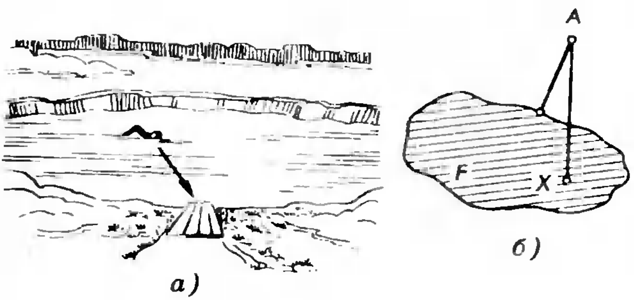


Рис. 189

Так же определяется расстояние от точки A до любой фигуры F. Из всех отрезков AX, где X — точка фигуры F, ищется самый короткий — **кратчайший отрезок**. Его длина и называется **расстоянием от точки** A **до фигуры** F (рис. 189, *б*).

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Расстояние от центра окружности до самой окружности равно радиусу* (рис. 190).

2. *Расстояние от точки A до прямой p (не проходящей через A) равно длине перпендикуляра AB, опущенного из точки A на прямую p.*

Докажем это. Возьмем любую другую точку X прямой p, отличную от точки B (рис. 191). Тогда треугольник ABX —

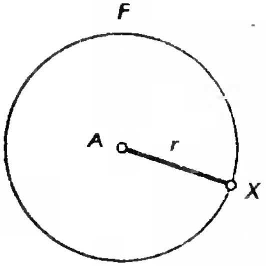


Рис. 190

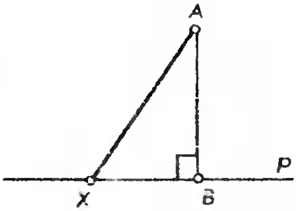


Рис. 191

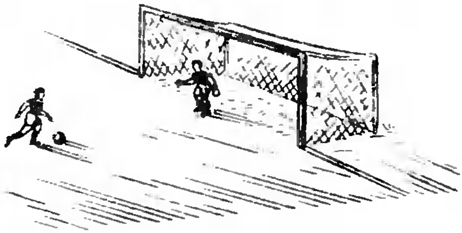


Рис. 192

прямоугольный, AB — его катет, AX — гипотенуза. Так как катет короче гипотенузы (почему?), то отрезок AB — кратчайший из отрезков, соединяющих точку A с точками прямой p.

Отрезки AX, отличные от AB, называются **наклонными**, проведенными из точки A к прямой p. Пользуясь этим термином, неравенство $AB < AX$ часто формулируют так: *перпендикуляр короче наклонной* (подразумевая, что и перпендикуляр AB, и наклонная AX проведены к одной и той же прямой из одной и той же точки).

Понятие расстояния от точки до прямой постоянно используется в спорте. Например, в футболе, когда при штрафном ударе отодвигают «стенку» игроков на 9 м или когда при пенальти ставят мяч в точку, удаленную от линии ворот на 11 м, и т. п. (рис. 192).

3. *Расстояние от точки до плоскости.* Определяя расстояние от точки до фигуры, мы можем не предполагать, что эта фигура и точка лежат в одной плоскости: данное определение годится и для пространственных фигур. Например, как найти расстояние от точки A до плоскости α, не содержащей эту точку? Надо взять длину самого короткого (кратчайшего) отрезка из всех отрезков, соединяющих точку A с точками плоскости α (рис. 193, *а*). Такой кратчайший отрезок AB на-

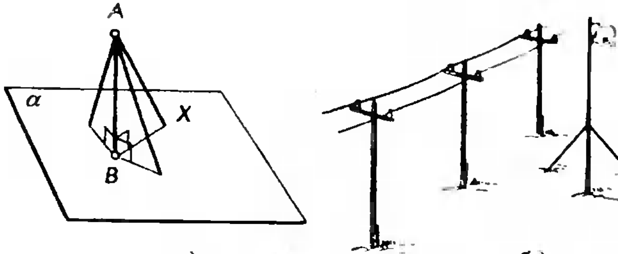


Рис. 193

зывается перпендикуляром к плоскости α, опущенным из точки A. Он перпендикулярен любой прямой, проходящей через точку B в плоскости α (подумайте, почему). Реальным примером перпендикуляра к горизонтальной плоскости могут служить вертикально стоящие столбы или мачты (рис. 193, *б*), а также отвесы.

Расстояние от точки A до фигуры F будем обозначать так: $|AF|$.

Комментарий

Обратите внимание на то, что расстояние от точки до отрезка (или луча) измеряется не так, как до прямой, содержащей этот отрезок (луч): расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту прямую, а расстояние от точки до отрезка может быть равно расстоянию от этой точки до одного из его концов (рис. 194). В связи с этим становится понятным, что точки, равноудаленные от сторон угла, лежат не только на биссектрисе этого угла. Попробуйте нарисовать фигуру, которая состоит из всех точек, равноудаленных от сторон угла.

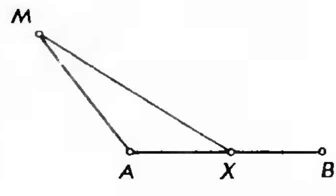


Рис. 194

§ 7. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

7.1. О покрытии плоских поверхностей многоугольниками. Вы, наверное, имели возможность любоваться красивыми паркетами или мозаичными орнаментами, выложенными на полу или на стене, из многоугольных плиток (рис. 195).

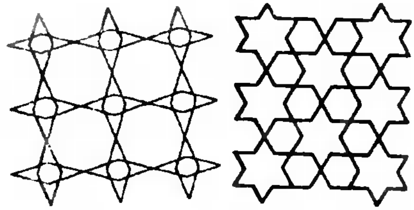


Рис. 195

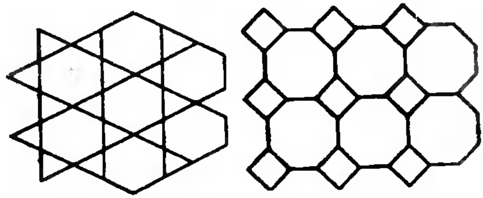


Рис. 196

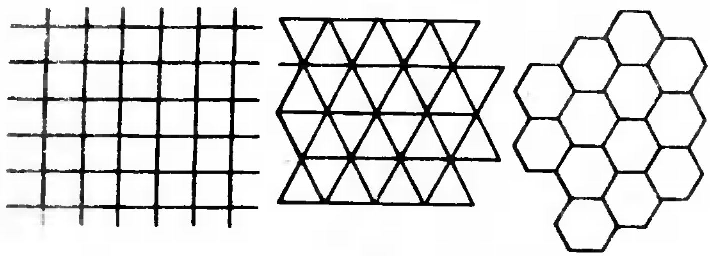


Рис. 197

Обычно когда плитками или паркетом нужно покрыть достаточно большую площадь, то орнамент составляют из многоугольников нескольких типов (рис. 196) или даже одинаковых многоугольников (рис. 197).

Конечно, красота орнамента зависит и от его раскраски, но нас в геометрии интересует лишь форма многоугольников. А в данный момент именно то обстоятельство, что одинаковыми треугольниками и четырехугольниками плоскую поверхность можно покрыть без «накладок» и не оставляя щелей (конечно, если плитки хорошего качества — точной геометрической формы и укладывал их настоящий мастер, а не недоучка). Такие «паркеты» из треугольников изображены на рис. 198. (Здесь уместно вспомнить и о хорошей кирпичной кладке: ведь из простых кирпичей в старину создавали шедевры архитектуры.)

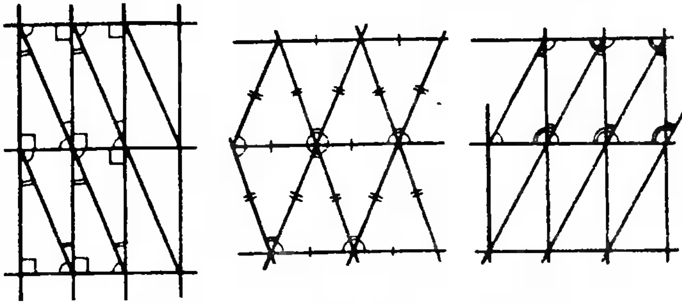


Рис. 198

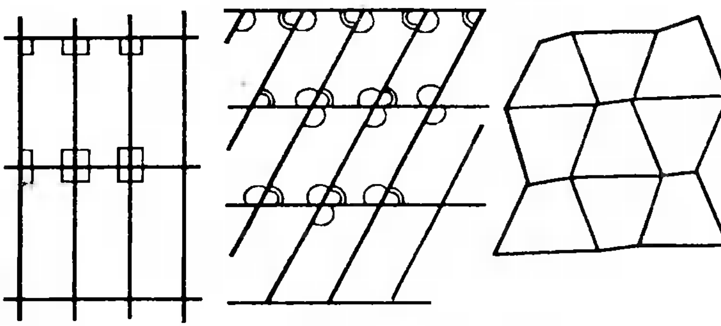


Рис. 199

Давайте подумаем, когда же возможно такое покрытие без накладок и щелей? Ясно, что если многоугольники прилегают по равным сторонам, то это возможно, когда сумма углов многоугольников вокруг каждого узла покрытия равна 360° (или, что то же самое, двум развернутым углам либо четырем прямым). И разглядывая рис. 199, вы обнаружите, что сумма углов любого четырехугольника (а не только квадрата или прямоугольника) равна 360°, а рис. 198 подсказывает вам, что сумма углов любого треугольника равна 180° (это вы, скорее всего, знали и раньше).

Разве не удивительно, что сумма углов треугольника не зависит от треугольника и всегда одна и та же? Но пока мы лишь увидели эту замечательную теорему, но не доказали ее. А доказательство еще не близко. И на пути к ее доказательству мы познакомимся с самой знаменитой задачей в истории геометрии — **проблемой пятого постулата Евклида**. Эту задачу крупнейшие математики решали более двух тысяч лет, и решение ее привело к созданию неевклидовой геометрии — геометрии Лобачевского.

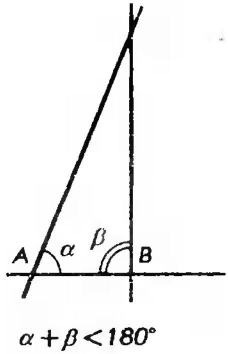


Рис. 200

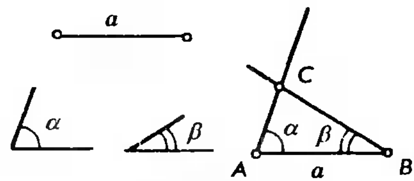


Рис. 201

7.2. Евклидова геометрия. Мы с вами постепенно строим здание геометрии, и каждый новый ее «этаж» опирается на уже построенные «этажи», а в основании лежат те положения, которые мы принимали за аксиомы. Такая традиция в построении геометрии сложилась еще в Древней Греции. Греки, заимствовав первоначальные геометрические сведения из Древнего Египта, в VII—V вв. до н. э. значительно их расширили и привели в известную систему, в которой отдельные свойства фигур и правила построения выводились из других. Геометрия складывалась уже не как совокупность отдельных правил, а как последовательность доказываемых теорем. Первое систематическое ее изложение было написано еще в V в. до н. э., но оно не сохранилось — возможно, потому, что позже, около 300 г. до н. э., появилось другое, гораздо более совершенное изложение — «Начала» Евклида.

Начинает Евклид с аксиом (в частности, с аксиом о том, что любые две точки можно соединить отрезком, и притом только одним, и что каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов). После аксиом у Евклида следуют Предложения — задачи на построение и теоремы. Мы с вами познакомились уже со многими из них.

Некоторые из аксиом Евклид назвал постулатами («постулат» в переводе с латыни — «требование»). Особую роль в истории геометрии сыграл пятый постулат Евклида.

Суть его состоит в том, что если из концов отрезка AB в одну сторону от него провели два луча, образующих с отрезком AB углы, в сумме меньшие развернутого угла, то эти лучи пересекаются (рис. 200).

Можно предполагать, что такой сложный постулат появился у Евклида при решении задачи о построении треугольника по стороне и двум углам, прилежащим к этой стороне (рис. 201). Согласно следствию 1 теоремы 7, в сумме углы должны быть меньше развернутого. Но что решение этой задачи всегда возможно, когда данные углы α и β в сумме меньше развернутого, без дополнительного постулата Евклид доказать не смог.

Не смогли этого доказать и другие знаменитые геометры, пытавшиеся решить «проблему» пятого постулата, вплоть до XIX в., т. е. более двух тысяч лет. И лишь в XIX в. было доказано, что этого сделать нельзя. И что можно допустить, будто утверждение пятого постулата не выполняется, и построить другую геометрию — неевклидову. Впервые неевклидова геометрия была построена русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и почти сразу вслед за ним венгерским математиком Я. Бойяи (1802—1860).

А геометрию, изложенную в «Началах» Евклидом, с этого времени стали называть евклидовой. Ее мы и будем изучать дальше.

«Начала» Евклида составляют значительную часть всего школьного курса геометрии и завершаются рассмотрением правильных многогранников (рис. 202). Их всего пять видов: правильный тетраэдр, куб (или гексаэдр, т. е. шестигранник), октаэдр (восьмигранник), додекаэдр (двенадцатигранник) и икосаэдр (двадцатигранник).

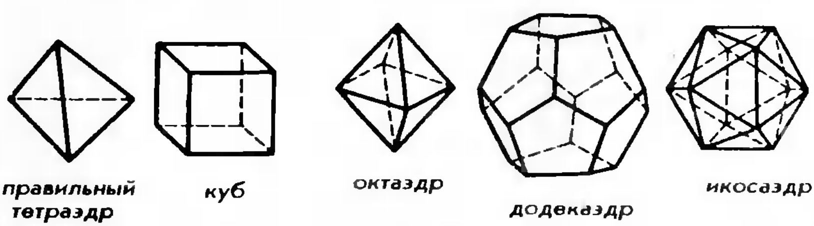


Рис. 202

Рассказывают, что царь Птоломей однажды спросил у Евклида, нельзя ли для него изложить геометрию попроще. На что Евклид ответил гордыми словами: «В геометрии нет царского пути».

Путь науки труден. Все значительное достигается большими усилиями — сделать совершенную машину, написать картину, взойти на гору, доказать новую теорему... Овладеть геометрией тоже нелегко.

7.3. Вопросы, вопросы, вопросы... Аксиома прямоугольника. Казалось бы, в п. 7.1 все просто и наглядно. И тем не менее вопросов у вас может возникнуть очень много. Ведь все рассуждения там опираются на возможность построить «паркет» из одинаковых треугольников и четырехугольников. Начнем с самого простого паркета из одинаковых прямоугольников (см. рис. 199).

У одинаковых (или, лучше сказать, у равных) многоугольников, конечно, должны быть соответственно равные стороны, а также соответственно равные углы. Все углы любых прямоугольников равны друг другу, потому что все они прямые. Так что у равных прямоугольников должны быть и равные стороны. То, что возможно реально изготовить такие прямоугольники (равные друг другу) и замостить ими плоский участок, всем ясно. А возможно ли такое построение выполнить в геометрии?

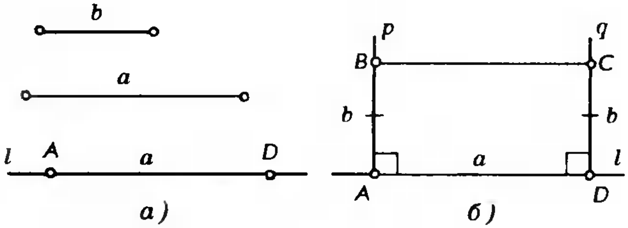


Рис. 203

Можно ли, задав два отрезка a и b, построить прямоугольник со сторонами a и b? Попробуем решить эту задачу и выполнить такое построение (например, циркулем и линейкой).

Сначала проведем какую-нибудь прямую l и отложим на ней отрезок $AD = a$ (рис. 203, *а*). Затем из точек A и D в одну сторону от прямой l проведем перпендикулярные к ней лучи p и q (вспомните, как это делается). На них отложим отрезки $AB = b$ и $DC = b$ (рис. 203, *б*). И наконец, соединим точки B и C отрезком BC. Получим четырехугольник $ABCD$, в котором $AD = a$, $AB = CD = b$, $\angle A = \angle D = 90°$. Будет ли он прямоугольником? А именно, будут ли прямыми его углы B и C? И будет ли сторона $BC = a$?

Опираясь лишь на те исходные положения, на те аксиомы, что мы уже сформулировали, этого доказать нельзя, хотя это пытались сделать после Евклида вплоть до XIX в. многие знаменитые геометры, например итальянец Джованни Саккери (1667—1733) и француз Адриен Лежандр (1752—1833). Поэтому, чтобы дальше строить евклидову геометрию, нам придется пополнить список аксиом следующей **аксиомой прямоугольника: для любой пары отрезков a и b можно построить прямоугольник со сторонами a и b.**

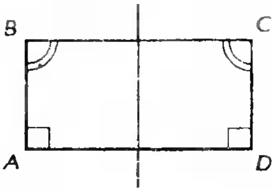


Рис. 204

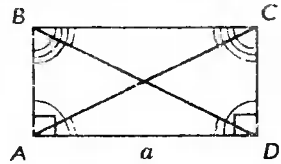


Рис. 205

Подробнее это означает, что в результате проведенного выше построения четырехугольника $ABCD$ окажется, что в нем $\angle B = \angle C = 90°$ и $BC = AD = a$.

И тогда все паркеты на рис. 198 и 199 могут быть составлены из равных друг другу (и произвольных) треугольников и четырехугольников. Попробуйте объяснить причину этого самостоятельно, но даже если сейчас вам не удастся найти правильное объяснение, то после ознакомления с содержанием пп. 7.4 и 7.5 все станет ясно. А теперь продолжим наши вопросы.

Что же будет, если допустить, что в построенном нами четырехугольнике $ABCD$ углы B и C не прямые? Ясно, что углы B и C равны (например, из симметричности четырехугольника $ABCD$ относительно серединного перпендикуляра отрезка AD; рис. 204). Но равенство $\angle B = \angle C$ можно доказать и так: провести диагонали AC и BD (рис. 205) и последовательно доказать, что: 1) $\Delta ABD = \Delta DCA$; 2) $\Delta ACB = \Delta DBC$; 3) $\angle B = \angle ABD + \angle DBC = \angle ACD + \angle ACB = \angle C$. Итак, углы B и C равны.

Оказывается, можно доказать, что тупыми углы B и C быть не могут. А вот что они не могут быть острыми, доказать нельзя. И если допустить, что углы B и C острые, то, опираясь на это предположение, можно построить неевклидову геометрию, а именно геометрию Лобачевского.

На плоскости Лобачевского уже нет тех паркетов из равных треугольников и четырехугольников, которые нарисованы на рис. 198 и 199. И даже обычного квадрата на плоскости Лобачевского нет. А четырехугольник $ABCD$ с острыми углами B и C называется в геометрии Лобачевского **четырехугольником Саккери.**

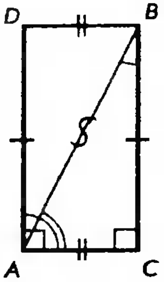


Рис. 206

7.4. Сумма углов прямоугольного треугольника. Вскоре, опираясь на аксиому прямоугольника, мы докажем, что **сумма углов любого треугольника равна 180°.** Начнем с прямоугольного треугольника. Для такого треугольника достаточно доказать, что сумма его острых углов равна 90°. Сделаем это, достроив прямоугольный треугольник до прямоугольника.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (такова традиция — обозначать прямой угол буквой C). Проведем из точки A отрезок AD, равный отрезку CB, перпендикулярный отрезку AC и лежащий от AC с той же стороны, что и BC (рис. 206). Соединив точки D и B отрезком DB, получим прямоугольник $ADBC$ (по аксиоме прямоугольника). Так как $AD = BC$, $AC = BD$ и $\angle C = \angle D = 90^\circ$, то $\Delta ADB = \Delta ABC$. Значит, $\angle BAD = \angle ABC$. Но $\angle BAD + \angle BAC = 90^\circ$. Поэтому и $\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$.

Итак, *сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.*

7.5. Сумма углов треугольника. Теперь мы можем доказать важнейшую теорему о треугольнике.

ТЕОРЕМА 11. (*О сумме углов треугольника.*) **Сумма углов любого треугольника равна 180°.**

Дано: ΔABC.
Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

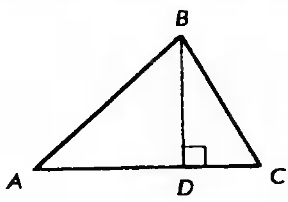


Рис. 207

Доказательство. Так как в треугольнике по крайней мере два угла острые, то всегда найдется такая сторона треугольника, к которой прилегают два острых угла.

Пусть к стороне AC прилегают острые углы. Опустим из вершины B на сторону AC перпендикуляр BD (рис. 207).

Точка D лежит внутри стороны AC (если бы это было не так, то получилось бы противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника). Высота BD разбивает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника: $\Delta\, ABD$ и $\Delta\, BCD$. Сумма двух острых углов каждого из получившихся прямоугольных треугольников равна 90°. Поэтому сумма всех четырех этих острых углов равна 180°. Но в сумме эти четыре острых угла и дают сумму всех углов треугольника ABC, т. е. сумма его углов равна 180°. Теорема доказана.

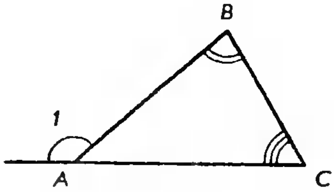


Рис. 208

Следствие. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.*

Доказательство. Если $\angle\, 1$ — внешний угол при вершине A треугольника ABC, то $\angle\, 1 = 180^\circ - \angle\, A$ (рис. 208). Но $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Поэтому $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C$. Следовательно, $\angle\, 1 = \angle B + \angle C$.

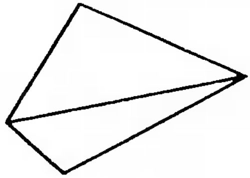


Рис. 209

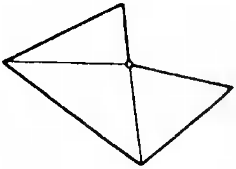


Рис. 210

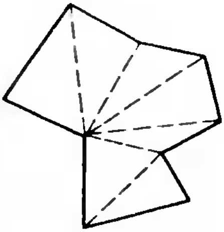


Рис. 211

7.6. Сумма углов многоугольника. Зная сумму углов треугольника, легко найти сумму углов любого многоугольника. Для этого надо многоугольник диагоналями разбить на треугольники. Например, четырехугольник можно разбить диагональю на два треугольника (рис. 209). Поэтому *сумма углов четырехугольника равна сумме углов двух треугольников, т. е.* 360°.

Пятиугольник можно разбить двумя диагоналями на три треугольника (рис. 210). Поэтому *сумма углов пятиугольника равна сумме углов трех треугольников, т. е.* $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$.

Если же мы рассмотрим n-угольник, то его можно разбить диагоналями на $n-2$ треугольника (рис. 211). Поэтому *сумма углов n-угольника равна* $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Обратите внимание, что, начиная с четырехугольника, у многоугольников могут уже встретиться углы, большие 180°. В треугольнике же все углы меньше 180°.

Комментарий

Во-первых, заметим, что введенная в этом параграфе аксиома прямоугольника может быть сформулирована и так: **если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и перпендикулярны третьей стороне, то этот четырехугольник — прямоугольник.** Именно в таком виде эта аксиома применяется в п. 7.4.

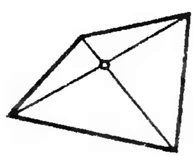


Рис. 212

Во-вторых, обратите внимание на то, что приведенное в п. 7.6 рассуждение о сумме углов многоугольника не является строгим доказательством, так как там не доказано, что всякий многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники, число которых на два меньше числа сторон многоугольника. При этом диагонали многоугольника не должны пересекаться. Ведь, например, разбиение четырехугольника пересекающимися диагоналями на четыре треугольника (как на рис. 212) не подходит для рассуждения, проведенного в п. 7.6. Это все достаточно сложные вопросы, но в школьном курсе геометрии рассматриваются лишь такие многоугольники, для которых указанные в п. 7.6 разбиения очевидны.

7.7. Размышления и итоги. Мы завершаем первый год изучения геометрии. Выделим самое главное из того, чему вы научились за этот год.

Во-первых, и это самое главное, вы стали доказывать свои утверждения (а это, напомним, важно не только в геометрии). Размышлять над вопросами: «Откуда это следует?», «Почему это так?», «Верно ли, что ..?» и т. п.— очень полезно. Убедительные, аргументированные, логичные рассуждения — необходимое качество умного, культурного человека. И как здесь не вспомнить слова М. В. Ломоносова: «Математику уж за то изучать надо, что она ум в порядок приводит».

Во-вторых, мы с вами довольно далеко продвинулись в геометрии, доказали важные теоремы о равенстве треугольников, о сумме углов треугольников, неравенстве треугольника и другие теоремы о треугольниках. Опираясь на них, в VIII классе мы изучим параллельность, докажем теоремы об измерении площадей, теорему Пифагора и даже начнем изучать тригонометрию, т. е. продвинемся значительно дальше Евклида.

В-третьих, вы научились решать многие геометрические задачи, строить разнообразные геометрические фигуры и делаете это уже не хуже египетских «герпедонаптов».

И наконец, мы надеемся, что вы полюбили геометрию, поняли красоту и стройность этой науки, познакомились с ее богатой историей и увидели, что геометрия присутствует везде: и в архитектуре окружающих вас зданий, и в технике, и в природе. С этой «вездесущностью» геометрии мы будем знакомить вас и в дальнейшем.

Задачи

Слово к учителю

Задачник составлен в соответствии со взглядами на геометрию и ее преподавание А. Д. Александрова и с общим замыслом учебника. И потому должен восприниматься только в контексте такого соответствия.

Прежде всего мы исходим из того, что выбирать задачи из предложенных в этой книге (для работы в классе или дома) будет сам учитель на основе своих собственных предпочтений. Отсюда ясно, почему в задачник включено много задач. Далее, учитель сам может акцентировать внимание на той или иной составляющей геометрии (воображение, практика, логика) и в первую очередь обратиться к соответствующим задачам. Наконец, возможен выбор разных видов деятельности ученика: учебной или исследовательской. Каждому из этих видов деятельности соответствуют определенные задачи, причем большинство нестандартных задач отнесено как раз к исследовательской деятельности ученика.

Эти нестандартные задачи — не обязательно повышенной трудности. Но в них может встретиться не до конца ясное (порой даже противоречивое) условие, неоднозначный результат, а подчас требуется некоторое развитие сюжета задачи и т. д.

Задачи к каждому параграфу и, по возможности, к каждому пункту разбиты на три рубрики: **«А»**, **«Б»**, **«В»**. Суть разбиения такова.

В раздел **«А»** отнесены задачи, требующие самых несложных интеллектуальных операций: наблюдения, рисования фигур в соответствии с заданным условием, простейших логических умозаключений. Предполагается, что именно такие интеллектуальные действия соотносятся с общекультурным уровнем усвоения геометрии.

В разделе **«Б»** — «Расширение знаний» находятся задачи разных видов: 1) содержащие сведения теоретического характера; 2) на работу с геометрическими величинами; 3) прикладные задачи, т. е. такие, сюжет которых использует нематематические объекты; 4) стереометрические задачи.

Раздел **«В»** — «Углубление знаний» включает задачи, которые, не увеличивая набора основных геометрических фактов, позволяют увязать их между собой разными способами.

Разбиение задач по этим рубрикам достаточно условно, и при желании учитель может трактовать их по-своему.

Задачи разделов «Б» и «В», как правило, сложнее, чем раздела «А», но нельзя сказать, что задачи раздела «В» сложнее задач раздела «Б» — просто это задачи с разными целями. Однако должно быть ясно, что исследовательская деятельность ученика связана с решением задач как раздела «Б», так и раздела «В».

ЗАДАЧИ К ВВЕДЕНИЮ

Вопросы для самоконтроля

▲ **Какие геометрические фигуры вы знаете?**

▲ **Как вы понимаете термины: а) «объединение фигур», б) «пересечение фигур»?**

▲ **Какие элементы многоугольника вы знаете?**

▲ **Какие элементы многогранника вы знаете?**

▲ **Какие задачи решает геометрия?**

▲ **Что вы знаете из истории геометрии?**

А

Задачи на объединение и пересечение фигур

1. Перерисуйте в тетрадь рис. 213. Какие фигуры получились в пересечении двух треугольников? Обведите их одним цветом. Какие фигуры являются объединением двух треугольников? Обведите их другим цветом. Нарисуйте сами два треугольника так, чтобы в их пересечении получилась фигура,

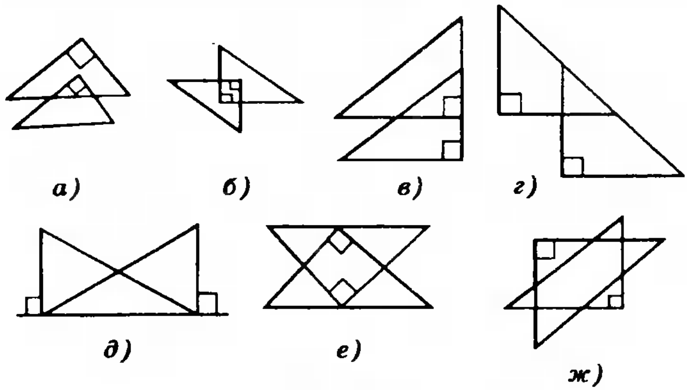


Рис. 213

отличная от приведенных на рис. 213. На сделанных вами рисунках выделите цветом как пересечение треугольников, так и их объединение.

2. Нарисуйте треугольник. Нарисуйте еще один треугольник так, чтобы в объединении с первым треугольником получились такие фигуры: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник; д) восьмиугольник. Какие еще фигуры вы можете получить при объединении двух треугольников?

3. Нарисуйте квадрат. Нарисуйте еще один квадрат так, чтобы в объединении с первым квадратом получились: а) прямоугольник; б) квадрат; в) пятиугольник; г) шестиугольник; д) семиугольник; е) восьмиугольник. Какие еще фигуры могут получиться в их объединении? Обведите цветом те фигуры, которые получились у вас в пересечении этих квадратов. Подумайте, может ли в объединении и пересечении двух квадратов получиться фигура одного и того же вида?

4. Нарисуйте два прямоугольника так, чтобы их пересечением оказались: а) отрезок; б) прямоугольник; в) квадрат. Какие еще фигуры вы можете получить в их пересечении? Обведите цветом те фигуры, которые получились у вас в объединении прямоугольников. Подумайте, может ли в пересечении и объединении прямоугольников получиться фигура одного и того же вида?

5. Может ли прямоугольник быть объединением двух: а) прямоугольников; б) квадратов; в) треугольников; г) пятиугольников? Объединением еще каких двух многоугольников может быть прямоугольник?

6. Нарисуйте куб. Закрасьте разными цветами пересечения: а) нижней и правой граней; б) передней и верхней граней; в) задней и левой граней; г) передней, нижней и правой граней. Назовем нижнюю грань $ABCD$, а верхнюю грань $A_1B_1C_1D_1$. При этом точка A_1 находится на одном ребре с точкой A, точка B_1 находится на одном ребре с точкой B, точка C_1 находится на одном ребре с точкой C, а точка D_1 находится на одном ребре с точкой D. Пересечением каких граней являются: д) ребро CD; е) ребро BB_1; ж) вершина C_1? з) Укажите грани куба, которые не имеют общих точек.

7. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выделите цветом объединение: а) ребер BA и BC; б) ребер A_1D_1, D_1C_1, C_1C; в) верхней и задней граней; г) левой, нижней и правой граней; д) каких-либо четырех граней; е) какого-либо ребра и грани, имеющей с ним общую вершину.

8. Нарисуйте треугольную пирамиду. Назовем ее $PABC$, причем точку P нарисуйте повыше, как на рис. 214. Выделите цветом: а) пересечение двух каких-либо ребер; б) пересечение трех каких-либо ребер; в) пересечение какого-либо ребра с гранью; г) пересечение двух каких-либо граней; д) пересечение трех каких-либо граней. Выделите цветом: е) объединение двух ребер с общей вершиной; ж) двух ребер, не имеющих общих точек; з) объединение трех ребер; и) объединение ребра и грани; к) объединение двух граней. Какие еще фигуры вы можете нарисовать на поверхности (границе) треугольной пирамиды?

9. Нарисуйте четырехугольную пирамиду. Назовем ее $PABCD$, причем точку P нарисуем повыше, как на рис. 215. Придумайте сами задачи по образцу заданий из предыдущей задачи.

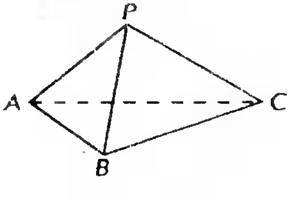


Рис. 214

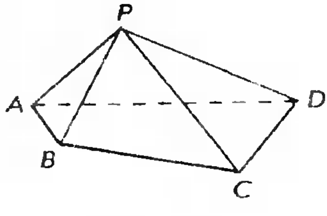


Рис. 215

Задачи на составление фигур

Составить две фигуры — значит получить такое их объединение, что общими точками этих фигур могут быть только точки на границе

А

10. Нарисуйте треугольник. Нарисуйте теперь другой треугольник так, чтобы вместе с первым они составили: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник. Сможете ли вы, составляя два треугольника, получить многоугольники других видов?

11. Какие многоугольники вы можете составить из двух равных равносторонних треугольников? А из трех? (Равные равносторонние треугольники имеют стороны одинаковой длины.)

12. Какие многоугольники вы можете составить из: а) двух квадратов; б) трех квадратов; в) четырех квадратов?

Б

13. На рис. 216 даны фигуры китайской игры «танг-рам». Из них попытайтесь составить такие фигуры, как на рис. 217.

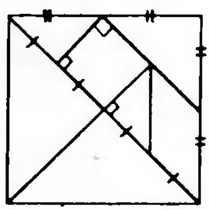
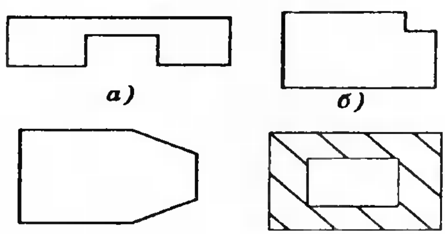


Рис. 216



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 217

14. В столярной мастерской вам дали задание сделать чертежный треугольник. Заготовки имеют вид четырехугольников. Какие это четырехугольники? Сколько их? Можно ли уменьшить их число?

15. Какие многогранники вы можете составить из двух равных кубов? Нарисуйте три вида — спереди, сверху и слева — полученных вами многогранников. Смогут ли ваши соседи по парте восстановить придуманный вами многогранник по этим трем видам? (Равные кубы имеют ребра одинаковой длины.)

В

16. Предположим, что у вас есть достаточное число прямоугольников размером 2×1. Какие прямоугольники вам удастся составить из двух таких прямоугольников? А из трех? Сможете ли вы составить из таких прямоугольников прямоугольники размерами 8×6; 8×7; 7×7?

17. а) Из каких-нибудь двух равнобедренных треугольников составьте один равнобедренный треугольник; б) а теперь — из трех. (У равнобедренного треугольника две стороны имеют одинаковую длину.)

18. Из двух треугольников можно сложить прямоугольник. Какие еще многоугольники можно сложить из них? (Под словом «сложить» здесь имеют в виду то же самое, что и под словом «составить».)

19. Из трех прямоугольных треугольников можно сложить квадрат. Какие еще многоугольники можно сложить из этих треугольников?

Задачи на разбиение фигур

Разбить фигуру на части — значит представить ее в виде объединения частей, которые составляют все вместе данную фигуру

А

20. Нарисуйте равносторонний треугольник. Прямолинейным отрезком (разрезом) разбейте (разрежьте) его на: а) два прямоугольных треугольника; б) три прямоугольных треугольника; в) три равнобедренных треугольника; г) четыре равносторонних треугольника; д) семь равносторонних треугольников; е) прямоугольник и три треугольника.

21. Сколько получится треугольников, если разбить всеми диагоналями: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?

22. Нарисуйте какой-нибудь многоугольник. Проведите в нем все диагонали. Сколько у вас получилось треугольников с вершинами в вершинах нарисованного многоугольника? (Диагональ многоугольника — это отрезок, который соединяет две его вершины, но не является его стороной.)

Б

23. Ясно, что куб можно разбить на прямоугольные параллелепипеды. А на сколько? Куб можно разбить и на кубы. А как? На сколько? Сможете ли вы разбить куб на пирамиды? Попробуйте сначала на четырехугольные, потом — на треугольные. Сможете ли вы разбить куб на три четырехугольные пирамиды?

24. Вам нужно разрезать круглый торт на шесть частей. Сколько вы сделаете разрезов? Можно ли уменьшить их число?

В

25. Нарисуйте четырехугольник. Как разрезать его на два, три, четыре, пять треугольников? Сможете ли вы разбить его на любое указанное число треугольников? Нарисуйте такой четырехугольник, который одним разрезом можно разбить на три треугольника.

26. Некий четырехугольник разбили одной прямой на: а) три треугольника; б) треугольник и пятиугольник; в) два треугольника и шестиугольник. Нарисуйте такой четырехугольник.

27. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. Разбейте его на треугольники такими способами: а) соединив одну вершину со всеми остальными; б) соединив точку внутри одной из сторон с вершинами; в) соединив внутреннюю точку с вершинами. Можно ли разбить его на большее число треугольников? Можно ли разбить его на любое число треугольников?

28. Нарисуйте невыпуклый пятиугольник. Разбейте его на треугольники любым способом. Можно ли разбить его на меньшее число треугольников? Есть ли такой пятиугольник, который можно разбить на два треугольника?

29. Одним и тем же способом можно разбить выпуклый четырехугольник на четыре треугольника, выпуклый пятиугольник — на пять треугольников и вообще любой выпуклый n-угольник — на n треугольников. Что это за способ?

30. Оказывается, прямоугольник можно разбить на два n-угольника. Как это сделать?

31. На сколько частей могут разбить плоскость: а) две прямые; б) три прямые; в) четыре прямые?

32. На сколько частей разбивают плоскость три прямые, проходящие через одну точку? А четыре прямые? А n прямых? А сколько было таких прямых, если плоскость оказалась разбитой на 566 частей?

ЗАДАЧИ К § 1

Вопросы для самоконтроля

▲ Приведите пример геометрической аксиомы.

▲ Что вы знаете об аксиомах?

▲ Как из отрезка получается луч? А прямая?

▲ Как можно сравнить два отрезка?

▲ Как сложить два отрезка?

▲ Как вычесть отрезок из отрезка? Всегда ли это можно сделать?

▲ Как вы понимаете фразу: «Отрезок умножили на натуральное число»?

▲ Даны отрезки a и b. Как понимать такие равенства: $a=3b$, $a=0,5b$? Как их можно записать иначе?

▲ Какие свойства длины отрезка вы знаете?

▲ Какие вы знаете единицы измерения длин?

Основные задачи

1.1. Чему равен периметр треугольника, у которого: а) длины сторон равны a, b, c; б) длины двух сторон равны a, длина же третьей стороны равна b; в) длины всех сторон равны a?

1.2. Чему равен периметр: а) квадрата со стороной a; б) прямоугольника со сторонами a, b?

Задачи к пункту 1.1

А

1.3. Нарисуйте две точки. Соедините их какой-нибудь линией. Потом еще одной. И еще одной. Как вы думаете, сколькими линиями их можно соединить? А сколько отрезков соединяют эти две точки?

1.4. Нарисуйте отрезок AB. Отметьте точку C внутри него. Сколько отрезков вы можете насчитать на этом рисунке?

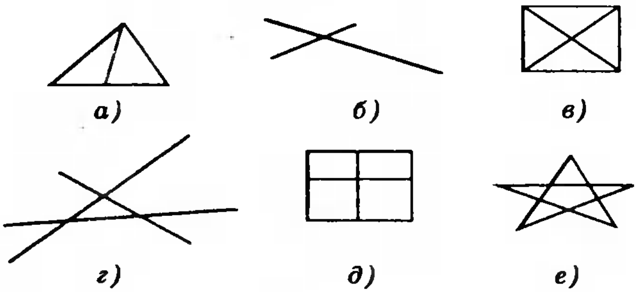


Рис. 218

1.5. Сколько отрезков вы можете насчитать на рис. 218?

1.6. Вернитесь к рисунку, сделанному вами к задаче 1.4. Опишите то, что вы на нем видите, используя слова: «пересечение», «объединение», «разбиение», «продолжение».

1.7. Нарисуйте отрезок AB. Продолжите его за точку B. Точку, в которой вы остановились, назовите C. Сколько отрезков на этом рисунке? Продолжите теперь отрезок AB за точку A. Точку, в которой вы остановились, назовите D. Сколько отрезков на рисунке теперь? На сколько отрезков увеличивается число отрезков на вашем рисунке, если вы продолжите отрезок за его конец?

1.8. Нарисуйте отрезок PQ. Внутри него возьмите точку A. Продолжением каких отрезков является отрезок PQ? Теперь поставьте внутри отрезка PQ еще одну точку B. Продолжением каких отрезков является теперь отрезок PQ?

1.9. а) Нарисуйте любой треугольник ABC. Продолжите его стороны: AB за точку B, BC за точку C, CA за точку A. Концы полученных отрезков соедините между собой. Какая получилась фигура?

б) Снова нарисуйте треугольник. Теперь каждую его сторону продолжите за оба конца. Концы полученных отрезков соедините последовательно отрезками. Какая фигура получилась теперь?

в) Какие получатся фигуры, если выполнить такую же работу, как в пунктах а) и б), но уже для четырехугольника? Можете ли вы ответить на последний вопрос, не делая рисунка?

1.10. а) Нарисуйте четырехугольник с непараллельными сторонами. Продолжите его противоположные стороны до взаимного пересечения. Выделите цветом полученную фигуру.

б) Нарисуйте пятиугольник. Его стороны, идущие через одну, продолжите до взаимного пересечения. Выделите цветом полученную фигуру.

в) Если вы сделали удачный рисунок в пункте б), то у вас получилась пятиконечная звезда, может быть, не очень красивая, «неправильная», как говорят. Правильные звезды вы научитесь строить потом. А сейчас, действуя таким же способом, попробуйте «получить» звезды из других многоугольников.

1.11. Нарисуйте горизонтальный отрезок и отметьте точку повыше него. Соедините отрезком отмеченную точку и какую-нибудь точку нарисованного отрезка. Проведите еще несколько таких же соединений. Какая получится фигура, если провести все такие отрезки?

1.12. Нарисуйте два отрезка как угодно. Отметьте на каждом из них по точке и соедините эти точки отрезком. Проведите еще несколько таких же отрезков. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие отрезки. А вот вопрос потруднее: какая получится фигура, если вы проделаете такую же работу с двумя отрезками, которые лежат в пространстве? Чтобы понять, что получится, можно сделать наглядную модель из палочек и ниток.

В

1.13. Вернитесь к задаче 1.4. Проделайте такую работу. Нарисуйте отрезок, поставьте внутри него вторую точку и подсчитайте, сколько отрезков получилось на рисунке. Затем поставьте третью точку и опять сделайте такой же подсчет. И так далее, увеличивая число точек на одну. Может быть, вам удастся подметить некую закономерность в числе полученных отрезков? Тогда попытайтесь ее доказать. А в заключение попробуйте получить формулу для числа получающихся отрезков, когда внутри данного отрезка поставлено n точек. (Можно попытаться решить эту задачу, если вы разобрались с задачей 1.7.)

1.14. Сможете ли вы нарисовать два отрезка так, чтобы: а) их пересечение и объединение являлись отрезками; б) их пересечение было отрезком, а объединение не было отрезком; в) их объединение было отрезком, а пересечение не было отрезком; г) их пересечение и объединение не являлись отрезками?

Задачи к пункту 1.2

А

1.15. На рис. 219 изображены разные по виду ломаные. Назовите их.

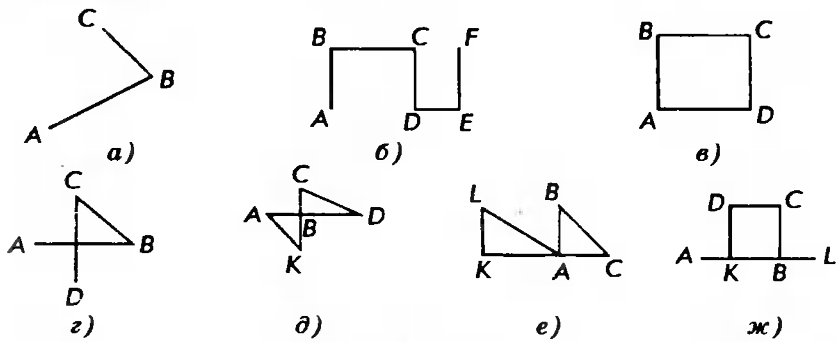


Рис. 219

1.16. Нарисуйте ломаные с такими названиями: а) AKM; б) $BCDB$; в) $ABCADB$.

1.17. Какая из фигур на рис. 220 является ломаной?

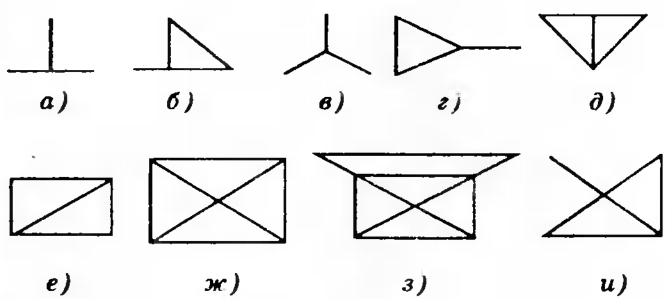


Рис. 220

1.18. Нарисуйте печатными буквами те буквы русского алфавита, в начертании которых есть только отрезки. Какие из этих фигур являются ломаными?

1.19. Нарисуйте квадрат. Отметьте в нем девять таких точек: вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Из всех ломаных, которые соединяют две противоположные вершины квадрата, выберите те, звенья которых идут по сторонам квадрата или параллельны им. Сколько таких ломаных можно провести? Какая из них проходит через все девять точек? Сколько у нее звеньев? А сможете ли вы провести такую ломаную, которая проходит через все эти точки и состоит всего из четырех звеньев?

Б

1.20. Нарисуйте куб. а) Нарисуйте ломаную, которая проходит через все его вершины. Какая из них имеет наименьшее число звеньев? б) Сможете ли вы нарисовать ломаную, на которой лежат все ребра куба, причем по каждому ребру ломаная проходит только один раз? в) Сколько ломаных, идущих по ребрам куба, соединяет две его противоположные вершины?

1.21. а) По ребрам куба идет простая ломаная. В ней четыре звена. Спереди она выглядит так, как на рис. 221. Нарисуйте куб и нарисуйте на его поверхности такую ломаную.

б) Пусть теперь по ребрам куба идет простая ломаная из пяти звеньев. Может ли она выглядеть спереди так, как на этом рисунке?

в) Пусть теперь по ребрам куба идет простая ломаная из шести звеньев. Как она может выглядеть спереди? Сверху? Может ли она спереди и сверху выглядеть одинаково? Может ли она выглядеть одинаково спереди, сверху и слева?

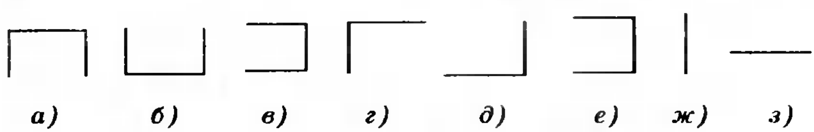


Рис. 221

1.22. Сколько отрезков в каркасе: а) тетраэдра; б) куба?

1.23. Нарисуйте многогранник, в каркасе которого: а) восемь отрезков; б) девять отрезков. Выберите сами натуральное число. Можете ли вы нарисовать многогранник, в каркасе которого будет выбранное вами число отрезков?

1.24. Каркас правильного тетраэдра можно увидеть, расположив его так, как показано на рис. 222. А как еще можно увидеть каркас тетраэдра?

1.25. Нарисуйте разные фигуры, которые можно увидеть, рассматривая по-разному каркас куба.

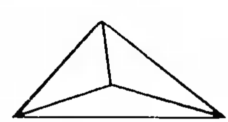


Рис. 222

1.26. Можно ли из одного куска проволоки, не ломая ее, сделать каркас правильного тетраэдра? Сколько сгибаний потребуется сделать в этом куске проволоки? Можно ли уменьшить их число? Решите такую же задачу для куба.

В

1.27. Сможете ли вы нарисовать: а) замкнутую пятизвенную ломаную, которая пересекает каждое свое звено два раза; б) замкнутую шестизвенную ломаную, которая каждое свое звено пересекает два раза; в) замкнутую шестизвенную ломаную, которая каждое свое звено пересекает один раз?

1.28. Какое наибольшее число точек самопересечения может быть у замкнутой ломаной из пяти звеньев? Из семи звеньев? Попробуйте решить задачу для ломаной, в которой любое нечетное число звеньев. Почему в условии задачи говорится о замкнутой ломаной? Изменится ли результат, если это условие отбросить? Если вы разобрались с ломаными, у которых число звеньев нечетно, переходите к ломаным, у которых число звеньев четно, и попытайтесь ответить на те же вопросы.

Задачи к пункту 1.3

А

1.29. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте луч AB. Нарисуйте луч BA. Какой фигурой является пересечение этих лучей? А какой фигурой является их объединение?

1.30. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте прямую AB. Сколько лучей вы видите на этом рисунке?

1.31. Нарисуйте отрезок BC и точку A вне прямой BC. Нарисуйте луч с началом в точке A и проходящий через какую-либо точку отрезка BC. Сделайте так несколько раз. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие лучи. Какая получится фигура, если через точку A проводить таким же образом всевозможные прямые?

1.32. Нарисуйте прямую a. Нарисуйте прямую b, которая прямую a пересекает. Нарисуйте прямую c, которая пересекает обе прямые a и b. Сколько при этом может получиться точек пересечения этих прямых?

1.33. а) Нарисуйте три точки, не лежащие на одной прямой. Через любые две из них проведите прямую. Сколько прямых еще можно провести таким же образом на этом рисунке?

б) Нарисуйте четыре точки, причем так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Решите теперь задачу, как и в пункте а).

в) Какие еще возможны расположения для четырех точек? Сколько прямых, проходящих через каждые две из них, можно провести теперь? При каком расположении точек число таких прямых будет наибольшим? А наименьшим?

1.34. Нарисуйте треугольник. а) Внутри него отметьте точку и проведите через нее прямую. На сколько частей разбился треугольник? б) Внутри этого же треугольника возьмите еще одну точку и через нее проведите другую прямую. На сколько частей разбился треугольник теперь?

Б

1.35. Сверху крепость имеет вид треугольника. Внутри нее требуется установить один прожектор так, чтобы им можно было освещать все стены. Где установить прожектор? А где его установить, если крепость имеет вид четырехугольника? Какой вид имеет крепость, если при любой установке прожектора хоть одна ее сторона не будет освещена полностью? (Считаем, что прожектор может совершить полный поворот «кругом».)

1.36. Сверху крепость имеет вид треугольника. За ее стенами требуется установить прожекторы так, чтобы ими освещались все стены. Сколько понадобится прожекторов для этого? А если крепость имеет вид четырехугольника? Нельзя ли уменьшить найденное вами число прожекторов?

1.37. Вам, конечно, ясно, что куб можно осветить снаружи шестью прожекторами. А как? Можно ли это сделать меньшим числом прожекторов?

В

1.38. Нарисуйте три прямые так, чтобы пересекались любые две из них, причем в разных точках. На сколько частей разбилась плоскость этими прямыми? Теперь давайте усложним задачу. Проведите четвертую прямую так, чтобы число частей разбиения плоскости было по возможности наибольшим. Чему равно это число? С увеличением числа таких прямых будет все труднее вести подсчет числа частей плоскости. Но, может быть, вы заметили некую закономерность? Если заметили, то попытайтесь ее доказать.

1.39. Нарисуйте некоторое число прямых так, чтобы они разбили плоскость на 20 частей. А теперь — на 21 часть. Придумайте способ разбиения плоскости прямыми на любое число частей, при этом желательно, чтобы число прямых было как можно меньше.

1.40. Расположите на бумаге шесть точек так, чтобы общее число прямых, проходящих через каждые две из них, равнялось: а) 15; б) 11; в) 8; г) 6.

Задачи к пункту 1.5

А

1.41. а) Нарисуйте прямую. Нарисуйте отрезок, не лежащий на ней. Отметьте точку A на прямой. На каждом из полученных на прямой лучей с началом в точке A отложите отрезки, равные данному. Назовем концы полученных отрезков B и C. Как теперь можно назвать точку A?

б) Пусть три точки A, B, C таковы, что $AB = BC$. Является ли точка B серединой отрезка AC?

1.42. Нарисуйте отрезок PQ. Пусть точка A является серединой этого отрезка, точка B — середина отрезка PA, точка C — середина отрезка AQ. Укажите на полученном рисунке все пары равных между собой отрезков.

1.43. Нарисуйте две прямые a и b, пересекающиеся между собой в точке O. На прямой a от точки O отложите равные отрезки OA_1 и OA_2. На прямой b от точки O отложите равные отрезки OB_1 и OB_2. Сравните между собой отрезки A_1B_1 и A_2B_2, A_1B_2 и A_2B_1. Какое предположение вы можете сделать?

1.44. Нарисуйте отрезок AB и точку O вне прямой AB.
а) Отметьте точку K на отрезке AB, проведите отрезок OK и продолжите OK за точку K на отрезок, равный OK. Проделайте такое же построение с несколькими точками отрезка AB, обязательно включив точки A и B. Что вы заметили?

б) Проделайте такую же работу, что и в пункте а), взяв вместо отрезка AB прямую AB. Что вы заметили теперь?

в) Отметьте на AB точку K, соедините ее отрезком с точкой O и продолжите этот отрезок за точку O на отрезок, равный OK. Так сделайте с несколькими точками отрезка AB, включая точки A и B. Что вы заметили?

г) Вместо отрезка AB возьмите прямую AB и проведите такие же наблюдения.

1.45. Нарисуйте отрезок a. а) Нарисуйте луч с началом в точке A. Какую фигуру образуют на нем такие точки X, что $AX \leq a$, $AX \geq a$? б) Нарисуйте прямую. Отметьте на ней точку A. Ответьте для прямой на те же вопросы, что и в пункте а).

1.46. Нарисуйте два отрезка a и b, причем $b > a$. а) Нарисуйте луч с началом в точке A. Какую фигуру образуют на нем такие точки X, что $a \leq AX \leq b$? б) Нарисуйте прямую. Отметьте на ней точку A. Ответьте для прямой на те же вопросы, что и в пункте а).

Б

1.47. Нарисуйте любые два отрезка. Вам надо сравнить их. Как вы будете действовать? При этом постарайтесь обойтись как можно меньшим числом операций.

1.48. Нарисуйте треугольник. Как вы проверите, есть ли у него равные стороны? При этом постарайтесь сделать это побыстрее.

1.49. Возьмите чертежный треугольник с неравными сторонами. Ничего не измеряя, укажите его наибольшую и наименьшую стороны. Как вы это обоснуете?

1.50. Постройте ломаную, все звенья которой равны. Если ломаная не является замкнутой, то проблем у вас быть не должно. Но вот как быть, если надо построить замкнутую ломаную? Начните с трехзвенной ломаной, а затем увеличивайте число звеньев на единицу. Если хотите, то можете выйти в пространство.

1.51. Сколько пар равных отрезков вы можете насчитать в каркасе прямоугольного параллелепипеда?

В

1.52. Нарисуйте прямую. Отметьте на ней две точки A и B. Найдите на этой прямой точку X такую, что $XA > XB$. Какую фигуру образуют на этой прямой все такие точки X? А какую фигуру образуют на этой прямой все такие точки Y, что $YA < YB$?

1.53. Точки A, B, C лежат на одной прямой. При этом известно, что $AC > BC$. Можете ли вы сказать, какой из отрезков больше: AB или BC?

1.54. Вам, разумеется, ясно, что у отрезка всего одна середина. Но сможете ли вы это обосновать?

Задачи к пункту 1.6

А

1.55. Какие отрезки на рис. 223 можно выразить как сумму двух других отрезков на этом рисунке? А какие из них можно выразить как разность?

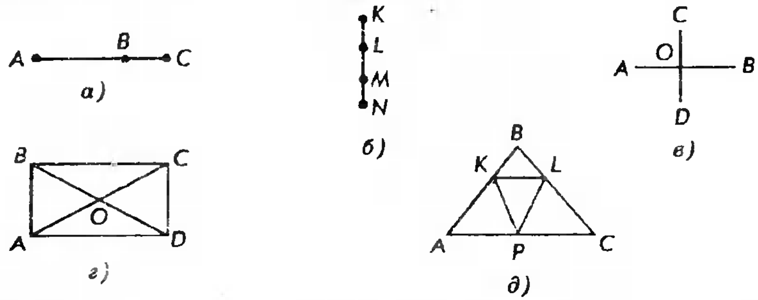


Рис. 223

1.56. Нарисуйте два неравных отрезка. Постройте их сумму и разность. Всегда ли вы сможете это сделать?

1.57. Нарисуйте квадрат. Проведите в нем диагональ (отрезок, соединяющий его противоположные вершины). Обозначим его сторону через a, диагональ же — через b. Постройте такие отрезки: а) $a + b$; б) $b - a$; в) $2a + b$. Сможете ли вы построить такие отрезки: $2a - b$, $3b - 5a$?

Б

1.58. Федя нарисовал на доске два отрезка, а потом построил их сумму и разность. Пришел Вася, стер два исходных отрезка, а сумму и разность оставил. Сможете ли вы помочь Феде восстановить исходные отрезки?

1.59. На рис. 224 изображены каркасы пространственных тел. Подсчитайте, из скольких отрезков можно составить каждый из этих каркасов.

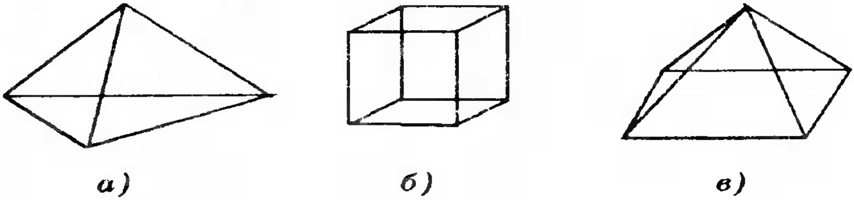


Рис. 224

Каркасы: *а* — тетраэдра; *б* — куба; *в* — четырехугольной пирамиды

В

1.60. а) Точка K — середина отрезка AB. Запишите это утверждение, используя действия с отрезками.

б) Два отрезка лежат на одной прямой и имеют общую середину. Запишите это утверждение, используя действия с отрезками.

1.61. Нарисуйте отрезок AB. а) Отложите на нем два равных отрезка: AC и BD. Докажите, что $AD=BC$. (Будьте внимательны: доказательство может зависеть от того, в каком порядке расположены на прямой точки A, B, C, D.) б) Отложите на прямой AB вне отрезка AB два равных отрезка: AC и BD. Докажите, что $AD = BC$.

1.62. Нарисуйте отрезок AB и его середину — точку C. Пусть точка X лежит внутри отрезка AC, а точка Y лежит внутри отрезка BC. Докажите, что: а) если $CX = CY$, то $AX = BY$; б) если $AX = BY$, то $CX = CY$; в) будут ли верны эти утверждения, если точки X и Y лежат соответственно на лучах CA и CB вне отрезка AB?

Задачи к пункту 1.7

А

1.63. Длина отрезка AB равна 46 мм. Точка C лежит внутри AB на расстоянии 22 мм от точки A. На каком расстоянии она находится от точки B? Как будет выглядеть ответ на этот же вопрос, если точка C будет лежать не внутри отрезка AB, а вне его на прямой AB?

1.64. Длина отрезка a равна 16 мм, длина отрезка b равна 3,2 см. Чему равны длины таких отрезков: $3a$; $0{,}5b$; $2a - 0{,}25b$?

1.65. Вычислите периметр треугольника, у которого: а) стороны равны 2,6 дм, 32 см, 165 мм; б) две стороны по 15,6 дм, а третья — 2,3 м; в) все стороны равны по 1,21 км.

1.66. Вычислите периметр: а) квадрата со стороной 1 дм; б) прямоугольника со сторонами 26 мм и 4,2 см.

1.67. Запишите формулу для вычисления периметра p таких частей прямоугольника, которые изображены на рис. 225.

1.68. Вычислите: а) сторону равностороннего треугольника, если его периметр равен 6 см; б) сторону квадрата, если его периметр равен 5 см.

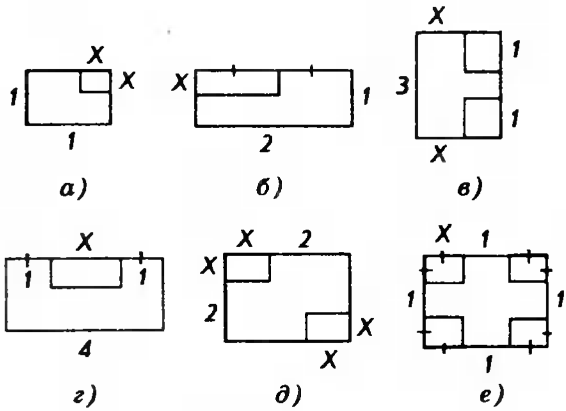


Рис. 225

1.69. Нарисуйте прямую и отметьте на ней точку A. а) Постройте на этой прямой такую точку, которая удалена от A на 2 см. Сколько вы получили таких точек? б) Какую фигуру образуют на этой прямой такие точки X, что: $AX \leq 2$ см; $AX \geq 3$ см; 3 см $\leq AX \leq 4$ см?

5

1.70. Запишите формулу для вычисления периметра p прямоугольника со сторонами a и b. а) Выразите из этой формулы величину каждой из сторон. б) На сколько увеличился периметр, если одна из сторон увеличилась на c? в) На сколько уменьшился периметр, если одна из сторон уменьшилась на c? г) Как изменился периметр, если одна из сторон изменилась на величину x, а другая изменилась на величину y? д) Как изменился периметр, если каждая из сторон увеличилась в 2 раза? Уменьшилась в 3 раза? е) Что сделать со сторонами, чтобы увеличить периметр на величину p_1? Уменьшить на величину p_2? ж) Что сделать со сторонами, чтобы увеличить периметр в 5 раз? Уменьшить в 10 раз? з) Пусть сторона a стала увеличиваться, а периметр остается постоянным. Что будет происходить со стороной b? и) Пусть одна из сторон увеличилась на величину c. Что произошло с другой стороной прямоугольника, если периметр не изменился? к) Пусть одна из сторон увеличилась в 2 раза. Что произошло с другой его стороной, если периметр не изменился? л) Нарисуйте график зависимости одной стороны от другой при постоянном периметре.

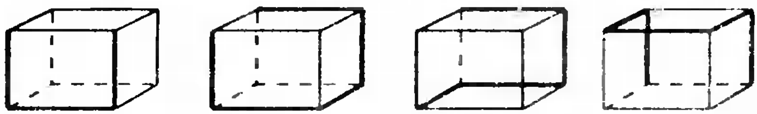
1.71. а) На прямом участке ограды длиной 20 м через каждый метр врыт столб. Сколько врыто столбов? Каково расстояние между первым столбом от начала и пятым столбом от конца? Десятым от начала и десятым от конца?

б) Прямоугольный участок земли размером 100×50 м нужно огородить. Сколько понадобится столбов для изгороди, если ставить их на расстоянии 1 м друг от друга?

1.72. Измерьте длину своего шага, своей ступни, расстояние между кончиками пальцев вытянутых рук, длину большого пальца от нижнего сустава до конца, длину ногтя на мизинце. Поупражняйтесь в вычислении длин, используя эти сведения.

1.73. Знаете ли вы, чему примерно равны в метрической системе: а) сажень и косая сажень; б) верста и коломенская верста; в) два вершка; г) семь футов (под килем); д) пядь (земли)?

1.74. Пусть длина ребра куба равна 1 дм. Чему равна длина ломаной, заданной на рис. 226?



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 226

1.75. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Каждое ребро этих многогранников равно 1 см. Какова наименьшая длина такой проволоки?

1.76. а) Можете ли вы найти толщину тетрадного листа?

б) Возьмите лист бумаги и сложите его пополам. Полученный лист опять сложите пополам. И так далее. Представьте себе, что вы можете повторять эту процедуру достаточно долго. Как вы думаете, после скольких сгибаний получится лист толщиной 1 см? 1 дм? А 1 м? (Листы бумаги плотно сжаты.)

В

1.77. Нарисуйте на одной прямой три равных отрезка: AB, BC, CD. Пусть за единицу длины принят отрезок AD. Чему равны длины всех остальных отрезков на этой прямой? Чему равны их же длины, если за единицу длины будет принят отрезок AC? А если AD?

1.78. Как изменяется значение длины отрезка: а) при уменьшении единицы длины в 10 раз; б) при увеличении единицы длины в 5 раз?

1.79. Измерив два отрезка некоторой единицей длины, мы получили, что один из них длиннее другого в 2 раза. После этого мы захотели сравнить их длины поточнее и решили для этого уменьшить единицу длины в 10 раз (например, вместо см перешли к мм). Добьемся ли мы цели?

1.80. а) На прямой отложите отрезок $AB = 4$ см и $BC = 2$ см. Вычислите AC.

б) Постройте теперь на этой прямой точку D такую, что $BD = 6$ см. Вычислите AD.

1.81. На прямой постройте отрезок AB длиной 6 см. а) Есть ли на отрезке AB такая точка, которая на 2 см ближе к A, чем к B? б) Найдется ли такая точка вне отрезка AB? в) Постройте на AB такую точку, которая в 2 раза ближе к A, чем к B.

1.82. Нарисуйте прямую. Постройте на ней отрезок AB такой, что $AB = 4$ см. Какую фигуру образуют на этой прямой такие точки X, что: а) $XA < 3$ см и $XB < 3$ см; б) $XA > 3$ см и $XB < 3$ см; в) $XA < 3$ см и $XB > 3$ см; г) $XA > 3$ см и $XB > 3$ см?

1.83. а) Сумма двух любых сторон треугольника равна 10 см. Вычислите его периметр.

б) Составьте аналогичную задачу для тетраэдра; при условии, что периметр каждой его грани равен 10 см, вычислите суммарную длину всех его ребер. Сможете ли вы решить эту задачу?

1.84. В треугольнике ABC провели отрезок BD до стороны AC. Чему равен BD, если: а) периметр данного треугольника равен 20 см, а периметры полученных треугольников равны 10 см и 12 см; б) периметр данного треугольника равен 3 м, а периметры полученных треугольников равны 1 м и 2 м?

ЗАДАЧИ К § 2

Вопросы для самоконтроля

▲ В чем отличие окружности от сферы? А что у них общего?

▲ В чем разница между окружностью и кругом? А между сферой и шаром?

- В чем отличие круга от шара? А что у них общего?
- Какие вы знаете части окружности? А части круга?
- Какие вы знаете части сферы? А части шара?
- Как связаны между собой диаметр и радиус круга? А шара?
- Какие построения в геометрии делаются линейкой? А циркулем?
- Какие вы знаете классические задачи на построение циркулем и линейкой? Что вы знаете об этих задачах?
- Приведите сами примеры круглых предметов.

Основная задача

2.1. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, стороны которого равны сторонам данного треугольника.

Задачи к пункту 2.2

А

2.2. Нарисуйте окружность. а) Нарисуйте точку, которая удалена от центра на расстояние, меньшее радиуса. б) Нарисуйте точку, которая удалена от центра на расстояние, большее радиуса. Какую фигуру образуют все такие точки?

2.3. Возьмите на окружности две точки и проведите через них прямую. а) Какие точки этой прямой удалены от центра на расстояние, меньшее радиуса? Нарисуйте фигуру, состоящую из всех таких точек. б) Какие точки этой прямой удалены от центра на расстояние, большее радиуса? Нарисуйте фигуру, состоящую из всех таких точек. в) Составьте сами похожую задачу про две окружности.

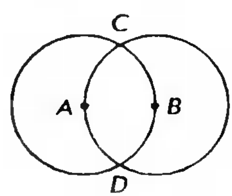


Рис. 227

2.4. На рис. 227 даны две окружности одного радиуса — такие окружности называют равными — с центрами в точках A и B. а) Проведите отрезки AB, BC, CA и объясните, почему они равны. б) Проведите отрезки AC, CB, BD, DA и объясните, почему они равны.

2.5. Нарисуйте окружность. а) Какую фигуру образуют середины всех ее радиусов? б) Пусть точка A — ее центр, а точка B лежит на окружности. Какую фигуру образуют все точки X такие, что $AX = 2AB$?

2.6. Нарисуйте два равных круга, окружности которых имеют две общие точки. а) На сколько частей разбилась плоскость этими окружностями? б) Нарисуйте пересечение и объединение этих кругов. в) А теперь нарисуйте третий такой же круг и выполните те же задания. г) Что изменится в ваших результатах, если круги не будут равными? Что не изменится?

2.7. Отметьте некоторую точку. Нарисуйте фигуру, все точки которой удалены от этой точки на расстояние d, удовлетворяющее условию: 2 см $\le d \le$ 3 см. Как бы вы назвали такую фигуру? А вот вопрос потруднее: можете ли вы представить эту фигуру как пересечение двух других на этом рисунке?

2.8. Нарисуйте окружность и отметьте какую-нибудь точку (она может находиться как на окружности, так и вне ее). Соедините отрезком отмеченную точку и какую-либо точку окружности. Проведите еще несколько отрезков точно так же. Какая получится фигура, если провести все такие отрезки?

2.9. Нарисуйте два круга так, чтобы они не имели общих точек. Отметьте в каждом из них по точке и соедините их отрезком. Проведите еще несколько таких же отрезков. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие отрезки.

5

2.10. Колесо велосипеда имеет форму окружности, и его втулка находится в центре этой окружности. Смогли бы вы кататься на велосипеде, если бы положение втулок было другое? (Сначала попытайтесь понять, как поедет одно колесо со смещенным положением втулки.)

2.11. Можно ли начертить окружность на листе бумаги, держа обе ножки циркуля неподвижно?

2.12. Можно ли циркулем постоянного раствора начертить окружности разных радиусов?

2.13. Окружность на земле можно очертить с помощью колышка и веревки, привязанной к нему. Но если мы хотим получить более точную окружность, то надо следить, чтобы веревка не накручивалась на колышек. Почему это важно?

2.14. а) К колу, вбитому в землю, на веревке привязана коза. Веревка соединена с колом с помощью кольца. Коза ест траву. Какова форма участка, с которого будет съедена трава?

б) Вы помните, конечно: «У лукоморья дуб зеленый...» Так вот, по какой линии ходит кот ученый?

2.15. Звуковая волна распространяется со скоростью примерно 330 м/с. Где находятся те, кто услышал звук выстрела через 3 с? Какое условие при этом нужно учитывать? А что изменится, если это будет звук грома? Кстати, знаете ли вы, как вычислить расстояние «до грозы», имея в руках только часы?

2.16. Представим себе, что источник звука движется прямолинейно 1 с. Где находятся те, кто могли бы его услышать через 1 с?

2.17. Как известно, Козьма Прутков говорил: «Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые: иначе такое бросание будет пустой забавою».

Так что же можно увидеть, глядя на разбегающиеся волны, и какие выводы можно отсюда сделать?

2.18. а) Вы нарисовали окружность радиусом 3 см, а где центр — забыли. Сможете ли вы восстановить его положение?

б) Вы нарисовали окружность с помощью монетки. Сможете ли вы найти ее центр?

В

2.19. Дана окружность с центром O. Ее диаметр AB равен 4 см. а) На диаметре взята точка C такая, что $OC = 1$ см. Чему равны расстояния от нее до концов диаметра? б) На прямой AB взята точка D такая, что $AD = 1$ см. Чему равно расстояние DB?

2.20. Даны две точки: A и B. а) Сколько можно провести через них окружностей? б) Есть ли среди них самая большая? А самая маленькая?

2.21. Можно ли определить окружность как замкнутую линию, все точки которой одинаково удалены от одной и той же точки?

2.22. Некоторая точка одинаково удалена от всех точек окружности. Что это за точка?

2.23. Отметьте две точки: A и B. Про точку C стало известно, что она удалена на 3 см от A и на 4 см — от B. Сможете ли вы установить то место, где находится точка C?

Задачи к пункту 2.4

А

2.24. Какие части круга вы видите на рис. 228?

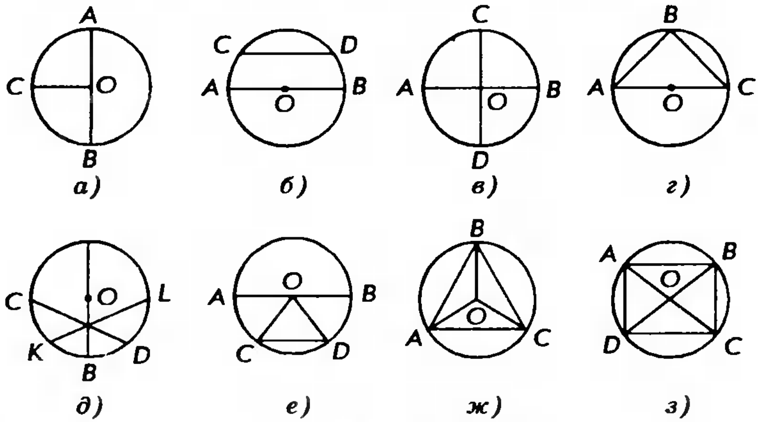


Рис. 228

2.25. Сколько дуг вы можете насчитать на рис. 229? А сколько будет дуг, если на окружности поставить 10 точек?

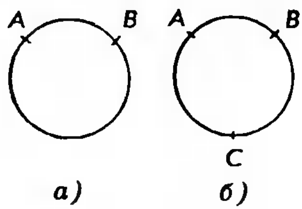


Рис. 229

2.26. Нарисуйте окружность. а) Отметьте на ней точку. Сколько можно провести через эту точку диаметров окружности? А хорд? Какая из этих хорд будет, по-вашему, наибольшей? Наименьшей? б) Теперь отметьте точку внутри нарисованного круга. Сколько можно провести через эту точку диаметров данной окружности? А хорд? Какой вопрос вы могли бы предложить сами?

2.27. На сколько частей могут разбить круг: а) две его хорды; б) три его хорды? Каково наименьше и наибольшее число частей, на которые можно разбить круг четырьмя хордами?

2.28. Нарисуйте окружность с центром O. Пусть некоторая точка X движется по этой окружности. Какую фигуру «заметет» радиус OX, если точка X прошла по окружности: а) некоторую дугу, меньшую полуокружности; б) полуокружность; в) всю окружность? Какую фигуру «заметет» при этом луч OX? Прямая OX?

Б

2.29. Придумайте сами какую-нибудь красивую фигуру, состоящую из окружностей или их частей.

В

2.30. Можно ли разбить круг одной прямой на два сектора?

2.31. Какие из приведенных ниже утверждений верны, а какие — нет:

а) в круге есть самая длинная хорда;

б) в круге есть самая короткая хорда;

в) для каждой хорды данного круга в нем найдется равная ей;

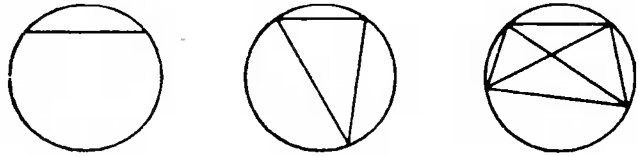
г) в каждом круге есть такой сегмент, который является и сектором этого круга;

д) в каждом секторе круга содержится бесконечно много сегментов этого круга;

е) в каждом круге можно найти такой его сегмент, который содержит данный сектор этого круга.

2.32. Даны две точки. а) Сколько через них можно провести дуг равных окружностей? б) Есть ли среди этих дуг самая большая? в) А есть ли среди этих дуг самая короткая?

2.33. Посмотрите на рис. 230. На каждой из его позиций нарисована окружность, на которой отмечено разное число точек. На позиции *а*) — две точки, на позиции *б*) — три точки, на позиции *в*) — четыре. Каждые две точки соединены отрезком. После чего подсчитано, на сколько частей разделился этими отрезками круг. Результаты подсчета указаны под каждой позицией рисунка. При этом можно заметить такую за-



а) $2=2^1$ б) $4=2^2$ в) $8=2^3$

Рис. 230

кономерность: число частей разбиения получится, если число 2 возвести в степень, на единицу меньшую числа взятых на окружности точек. Проверьте эту закономерность для всех наших позиций. Как, по-вашему, сколько получится частей круга, если такую же работу проделать с шестью точками окружности? Какой вывод вы можете сделать из результатов этой задачи?

Задачи к пункту 2.5

Задачи на сферу и шар вы можете решать, используя реальные предметы, имеющие такую форму

А

2.34. В задаче 2.2 замените в условии окружность на сферу и ответьте на те же вопросы.

2.35. В задаче 2.3 замените в условии окружность на сферу и ответьте на те же вопросы.

2.36. В задаче 2.5 замените в условии окружность на сферу и ответьте на те же вопросы.

В

2.37. В задаче 2.31 замените в условии круг на шар и ответьте на те же вопросы.

2.38. Сколько общих точек могут иметь две большие окружности одной и той же сферы? А две произвольные окружности?

2.39. На сколько частей делят сферу: а) две большие окружности; б) две любые окружности; в) три большие окружности; г) 10 окружностей, проходящих через один и тот же диаметр сферы?

2.40. Отметьте на шаре точку A. Проведите окружность с центром в этой точке. Возьмите на этой окружности точки B и C. Объясните, почему треугольник ABC — равнобедренный. А может ли такой треугольник быть равносторонним?

2.41. На сфере дана точка. Сколько можно провести через нее: а) больших окружностей; б) окружностей данного радиуса?

2.42. На сфере даны две точки. Сколько можно провести через них окружностей, лежащих на этой сфере? Есть ли среди них самая большая? А самая маленькая?

2.43. Нарисуйте плоскость, а на ней — окружность.

а) Сколько сфер можно провести через эту окружность?

б) Есть ли среди этих сфер наибольшая?

в) Есть ли среди этих сфер наименьшая?

2.44. Нарисуйте плоскость, а на ней — окружность. а) Нарисуйте две сферы, которые проходят через эту окружность. На сколько частей они делят пространство? б) Нарисуйте две равные сферы, которые проходят через эту окружность. Нарисуйте пересечение и объединение шаров, которые ограничены этими сферами.

2.45. Докажите, что плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает ее по окружности.

Задачи к пункту 2.6

А

2.46. Постройте две точки A и B так, что $AB = 5$ см. Постройте точку X такую, что: а) $XA = 3$ см, $XB = 4$ см; б) $XA = 3$ см, $XB = 2$ см; в) $XA = 3$ см, $XB = 8$ см. Удастся ли вам построить точку X такую, что $XA = 3$ см, $XB = 1$ см?

2.47. Постройте треугольник со сторонами: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 25 мм, 45 мм, 60 мм; в) 5 см и 10 см.

2.48. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте отрезок с концом в точке A и равный AB. Нарисуйте также отрезок с концом в точке B и равный AB. Могут ли такие отрезки пересекаться? Может ли их общая точка быть их общим концом? Ответьте на те же вопросы, если из точек A и B проводить по-прежнему равные между собой отрезки, но не равные AB? И наконец, понаблюдайте, как располагаются такие точки, что отрезки XA и XB равны.

2.49. Как построить: а) треугольник с тремя равными сторонами; б) четырехугольник с четырьмя равными сторонами?

Б

2.50. Идя по шоссе, турист увидел проселок и указатель, на котором было написано, что до деревни по этому проселку 2 км. Турист знал также, что расстояние от этой же деревни до ближайшей к ней автобусной остановки на том же шоссе составляет 2,5 км. Как вы думаете, может ли он установить по этим данным свое местонахождение на шоссе и оценить, сколько ему осталось пройти до остановки автобуса?

В

2.51. Нарисуйте четырехугольник. Как построить четырехугольник с такими же сторонами, что и данный?

Рис. 231

2.52. Нарисуйте отрезок. Из каждой его точки проведите всевозможные отрезки, равные другому данному отрезку. Постройте получающуюся фигуру. Сделайте то же, если вначале будет нарисована окружность; треугольник; квадрат.

2.53. Строя окружности, можно получить красивые розетки. Попробуйте сами построить такую, как на рис. 231.

ЗАДАЧИ К § 3

Вопросы для самоконтроля

- ▲ Какие вы знаете углы?
- ▲ Какие определения угла вы знаете?
- ▲ Какие элементы угла вы знаете?
- ▲ Какой угол называется развернутым?
- ▲ Как построить угол, равный данному, с помощью реек; циркулем и линейкой?
- ▲ Какие углы называются смежными?
- ▲ Какие углы называются вертикальными?
- ▲ Какой угол называется прямым?
- ▲ Что такое перпендикуляр к прямой?
- ▲ Какой угол называется тупым? Острым?
- ▲ Как сравнить два угла?

- ▲ Что такое биссектриса?
- ▲ Как циркулем и линейкой разделить угол пополам?
- ▲ Как построить перпендикуляр к данной прямой?
- ▲ Какие прямые называются взаимно перпендикулярными?
- ▲ Что такое трисекция угла?
- ▲ Какие свойства имеет мера угла?
- ▲ Какие вы знаете единицы измерения углов?
- ▲ Какие свойства имеет градусная мера угла?
- ▲ Что такое 1 градус? 1 минута? 1 секунда?
- ▲ Какие вы знаете приборы для измерения углов?
- ▲ Можете ли вы доказать, что вертикальные углы равны?

Основные задачи

3.1. Два неразвернутых угла равны. Докажите, что смежные к ним углы тоже равны.

3.2. а) Докажите, что биссектрисы двух смежных углов образуют прямой угол.

б) Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов образуют развернутый угол.

3.3. а) Нарисуйте острый угол. Через вершину угла проведите два луча, перпендикулярных сторонам угла, причем так, чтобы угол между ними тоже был острый. Докажите, что полученный угол равен данному.

б) Проделайте такую же работу, нарисовав тупой угол.

в) Снова нарисуйте острый угол. Теперь через вершину этого угла проведите два луча так, чтобы они были перпендикулярны сторонам этого угла, но образовывали между собой тупой угол. Как вы думаете, есть ли какая-нибудь связь между данным углом и построенным? Если вам кажется, что есть, то попытайтесь это доказать.

г) Проделайте аналогичную работу, если сначала будет нарисован тупой угол.

д) Как можно сфомулировать полученные вами результаты во всех пунктах этой задачи в виде одного предложения?

А

3.4. Назовите все углы, которые изображены на рис. 232.

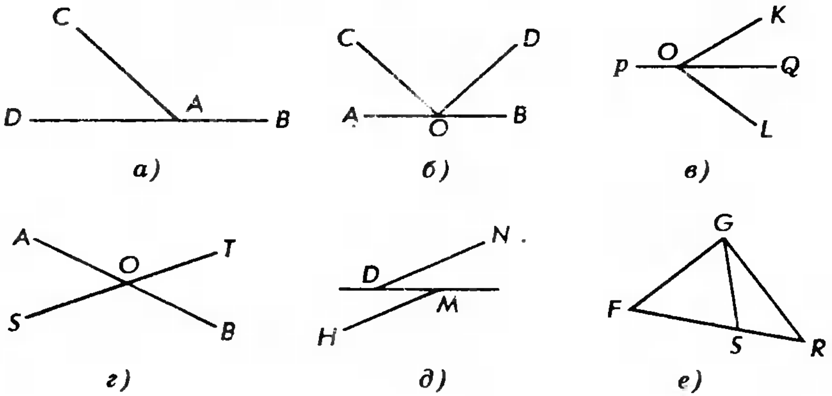


Рис. 232

3.5. Нарисуйте угол. Из его вершины проведите луч внутри угла. Сколько углов на этом рисунке? Ответьте на тот же вопрос, если провести два таких луча; три таких луча. А если провести 10 таких же лучей?

3.6. Хордой угла назовем отрезок, соединяющий две точки на его сторонах и лежащий внутри угла.

Нарисуйте угол. Нарисуйте теперь: а) какую-либо его хорду; б) две его хорды с общим концом; в) две пересекающиеся хорды; г) две параллельные хорды.

3.7. Нарисуйте отрезок. Нарисуйте какой-нибудь угол, для которого этот отрезок является хордой. Нарисуйте еще один такой же угол. Сколько таких углов можно нарисовать? Могут ли вершины таких углов располагаться на одной прямой? А на одной окружности?

3.8. Нарисуйте: а) два угла с общей вершиной; б) два угла с общей стороной; в) два угла, стороны которых лежат на двух пересекающихся прямых; г) два угла, имеющих общий отрезок; д) два угла так, чтобы стороны одного пересекали стороны другого; е) углы ABC и ABD; ж) углы BCD и BCE; з) углы KLM и PLG; и) углы STO, TOS и OST.

3.9. Нарисуйте два луча с общей вершиной O. а) Внутри одного из них возьмите точку A, внутри другого из них — точку B. Соедините их хордой. Пусть точка X движется от

A к B по этой хорде. Какую фигуру при этом образуют все лучи OX?

б) Проведите окружность с центром в точке O. Пусть она пересекает стороны угла в точках C и D. Пусть точка Y движется по дуге CD от точки C к точке D. Какую фигуру образуют при этом все лучи OY?

Б

3.10. Нарисуйте тетраэдр $PABC$. Пусть точка X движется по ломаной ACB. Нарисуйте фигуру, которую образуют все отрезки PX. Придумайте сами аналогичные задания.

В

3.11. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух углов, отличных от развернутого? В объединении таких углов?

3.12. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух полуплоскостей? В их объединении?

3.13. Нарисуйте треугольник. Объясните, почему его можно считать пересечением трех углов, отличных от развернутого? И трех полуплоскостей тоже. И двух углов, отличных от развернутого. Можно ли дать такое объяснение для любого четырехугольника?

3.14. Нарисуйте два угла так, чтобы: а) их пересечением и объединением были углы; б) угол получился только в их пересечении; в) угол получился только в их объединении; г) ни их пересечение, ни их объединение не было углом.

Задачи к пунктам 3.2 и 3.3

А

3.15. На рис. 233 укажите равные углы.

3.16. Используя термин «хорда угла», дайте определение равных углов.

3.17. У двух углов оказались равны некоторые хорды. Значит ли это, что сами углы равны?

3.18. Нарисуйте угол. Обозначьте его как $\angle 1$. Постройте $\angle 2$, равный $\angle 1$, как указано на рис. 234.

3.19. Нарисуйте окружность с центром в точке A. Отметьте на ней точки B и C. Постройте угол, равный углу BAC так,

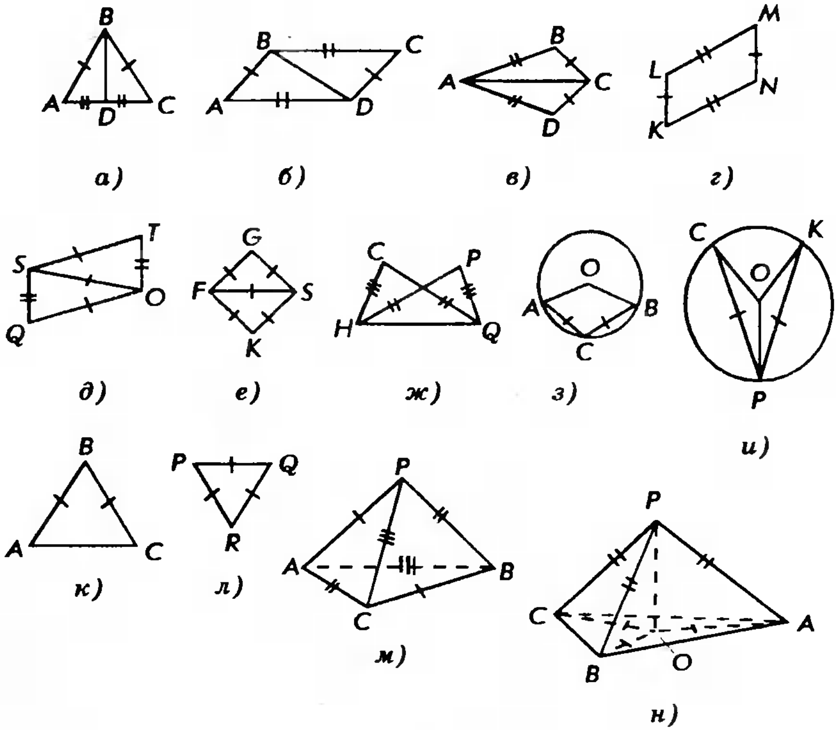


Рис. 233

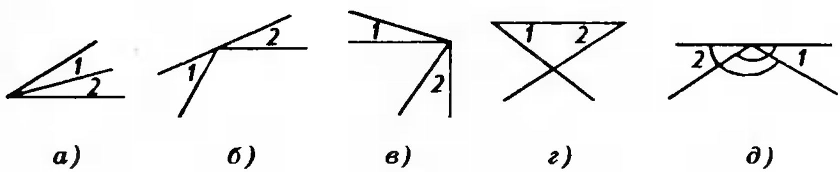


Рис. 234

чтобы одной его стороной был луч *AC*. Постройте еще один угол, равный углу *BAC*.

3.20. а) Нарисуйте угол. Нарисуйте угол, больший данного, и угол, меньший данного.

б) Нарисуйте два угла. Сравните их.

3.21. Нарисуйте треугольник. Предложите разные способы, чтобы выяснить, какой из его углов самый большой, а какой — самый маленький.

3.22. Однажды Феде понадобилось построить 10 равных углов, да побыстрее. Что бы вы ему посоветовали?

3.23. Как построить на земле угол, равный данному, если у вас в руках один кусок веревки?

3.24. Нарисуйте угол. Посмотрите на него в увеличительное стекло. Будет ли угол, который вы видите через стекло, больше, чем угол, нарисованный вами?

В

3.25. а) Нарисуйте угол. Нарисуйте угол, больший данного, и угол, меньший данного. Всегда ли вы сможете построить два таких угла?

б) Нарисуйте два неравных угла. Как построить угол, больший меньшего из них и меньший большего из них? Сколько таких углов можно построить?

3.26. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, два угла которого равны углам данного треугольника. Сравните их третьи углы.

3.27. Нарисуйте окружность. Отметьте на ней две точки A и B. По одной из получившихся дуг движется точка X. Отметьте несколько положений этой точки и сравните углы, образованные отрезками XA и XB. Какое предположение вы можете сделать? Проведите такой же опыт для другой линии.

Задачи к пункту 3.5

А

3.28. Назовите пары смежных углов на рис. 235.

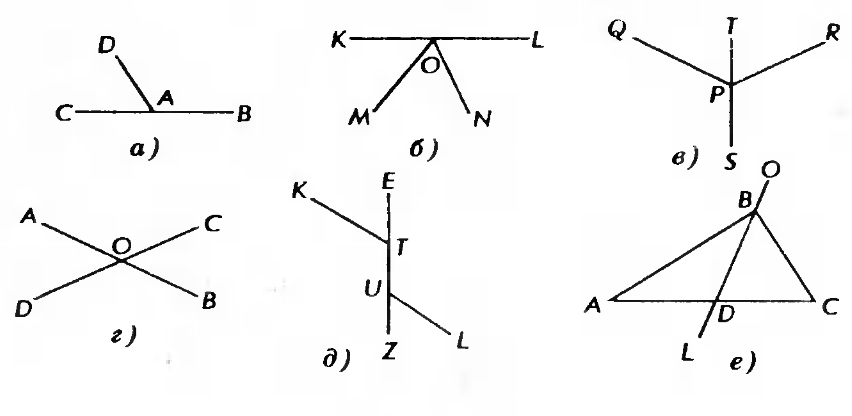


Рис. 235

3.29. Нарисуйте угол. Постройте угол, смежный к нему. Сколько таких углов можно построить?

3.30. Нарисуйте треугольник. Нарисуйте все углы, смежные к углам треугольника. На сколько частей разбита плоскость на вашем рисунке?

3.31. Сколько пар неразвернутых вертикальных углов вы можете насчитать на рис. 236?

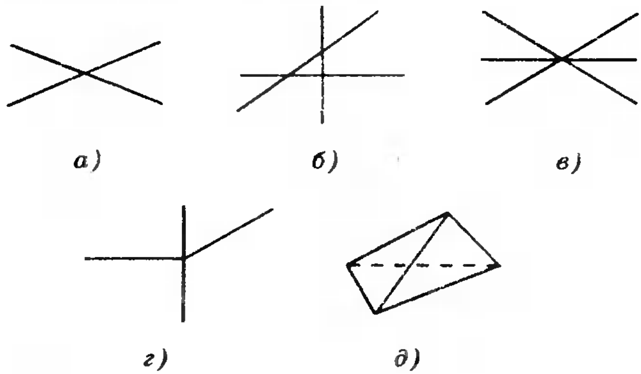


Рис. 236

3.32. Нарисуйте пару вертикальных углов. Сколько пар смежных углов вы можете насчитать на своем рисунке?

3.33. Нарисуйте треугольник. В каждой его вершине постройте угол, вертикальный к углу треугольника. На сколько частей разбилась плоскость на вашем рисунке?

5

3.34. Сколько прямых углов вы можете насчитать на поверхности прямоугольного параллелепипеда?

3.35. Какие углы на рис. 237 являются смежными? А какие вертикальными?

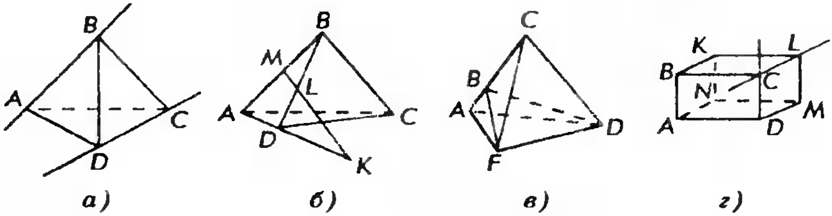


Рис. 237

3.36. Возьмите тетрадный лист и оборвите его так, чтобы по краям не осталось никаких прямолинейных участков. На оставшейся части листа одними только сгибаниями получите: а) смежные углы; б) прямой угол; в) вертикальные углы.

3.37. Как с помощью веревки и колышков построить на земле прямой угол?

3.38. Нарисуйте прямую. Отметьте на ней точку A. Пусть AB и AC — два луча на этой прямой. Нарисуйте угол BAK. С другой стороны от этой прямой нарисуйте угол CAM, равный углу BAK. Что вы заметили на этом рисунке? Как вы это объясните?

3.39. Какие фигуры могут получиться в пересечении двух прямых углов? А в их объединении?

3.40. Нарисуйте два смежных угла. Какая фигура является их пересечением? А их объединением?

3.41. Верны ли такие утверждения: а) если два угла прямые, то они смежные; б) если два угла смежные, то один из них острый, а другой — тупой; в) если два угла смежные, то один из них больше другого?

3.42. Про два угла известно следующее: 1. У них есть общая сторона. 2. Их стороны лежат на двух данных прямых. 3. Сторона одного из них является продолжением стороны другого. 4. Они равны.

Следует ли из какого-либо из этих утверждений, что эти углы вертикальные? А из каких-либо двух утверждений?

Задачи к пункту 3.6

А

3.43. На рис. 238 каждый из обозначенных углов представьте как сумму или разность двух других углов.

3.44. Нарисуйте угол. Из его вершины проведите луч, лежащий в данном угле. Обозначьте полученные углы. Каждый из них запишите как сумму или разность двух других углов на этом рисунке. Сделайте такую же работу, проведя два луча в данном угле.

3.45. Нарисуйте два неравных угла. Постройте их сумму и разность. Какая «неприятность» может случиться при построении суммы?

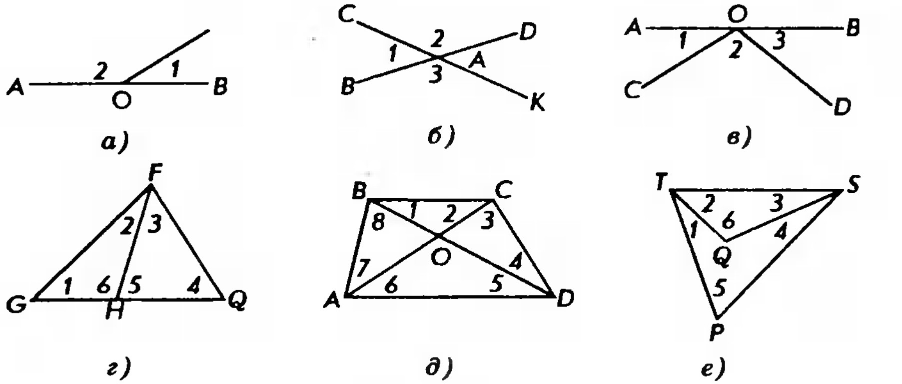


Рис. 238

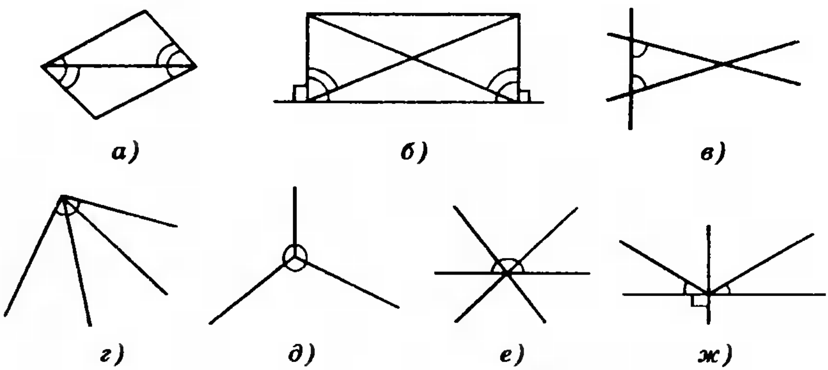


Рис. 239

3.46. Нарисуйте угол. Обозначьте его α. Постройте угол 2α. Каким по виду будет угол 2α, если угол α: а) прямой; б) острый; в) тупой?

3.47. На рис. 239 отмечены равные углы. Какие еще равные углы есть на этом рисунке?

В

3.48. Постройте треугольник. Постройте сумму его углов. Что вы заметили? Проделайте такую же работу для четырехугольника. Что вы заметили теперь? Предположим, что вам удалось установить, чему равна сумма углов треугольника. Смогли бы вы теперь получить результат для суммы углов четырехугольника, уже не проводя никаких наблюдений? А можно ли действовать в обратном порядке: зная, чему равна сумма углов четырехугольника, установить, чему равна сумма углов треугольника?

Известно, что в прямоугольнике все углы прямые. Попытайтесь исходя из этого наметить план действий для получения величины суммы углов любого четырехугольника.

3.49. Нарисуйте $\angle ab$. а) Отложите на нем два равных угла: $\angle ac$ и $\angle bd$. Докажите, что $\angle ad = \angle bc$. б) Теперь два равных угла: $\angle ac$ и $\angle bd$ — отложите так, чтобы лучи c и d не лежали в данном угле. Что теперь можно доказать на получившемся рисунке? Зависит ли ваше доказательство от расположения лучей на плоскости?

Задачи к пункту 3.7

А

3.50. На рис. 240 укажите лучи, которые являются биссектрисами. Сделайте то же на рис. 241.

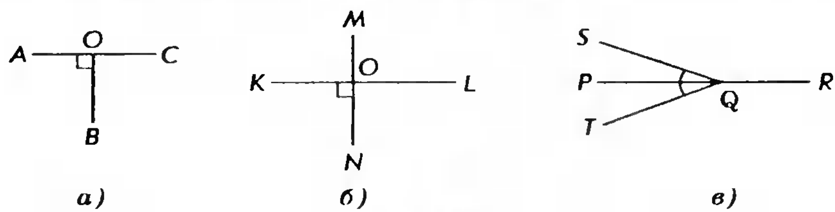


Рис. 240

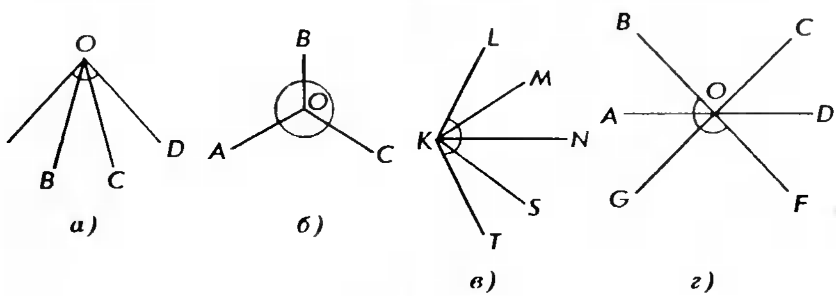


Рис. 241

3.51. Луч c является биссектрисой угла со сторонами a и b. Как это можно сказать иначе?

3.52. Нарисуйте луч a. Нарисуйте лучи b и c, которые составляют с лучом a равные углы. Всегда ли при этом луч a будет биссектрисой угла, образованного лучами b и c?

3.53. Какой по виду угол составляет со сторонами угла его биссектриса, если данный угол: а) развернутый; б) не является развернутым?

3.54. Нарисуйте треугольник. Постройте биссектрисы его углов. Что вы заметили? Разнообразьте ваши наблюдения — постройте биссектрисы углов, смежных к углам треугольника. Что вы смогли заметить теперь?

Б

3.55. На классной доске Федя нарисовал угол и построил его биссектрису. а) Пришел Вася и стер угол, а биссектрису оставил, и не только биссектрису, но и одну точку на стороне угла. Можно ли восстановить картину? б) А если Вася оставил только часть биссектрисы и точку на стороне угла? г) Если он оставил часть биссектрисы и хорду угла?

3.56. Федя нарисовал на доске два угла, потом построил их сумму и разность. Пришел Вася, стер исходные углы, а сумму и разность оставил. Помогите Феде восстановить исходные углы.

3.57. Как нарисовать на земле прямой угол, имея в руках только кусок веревки?

В

3.58. Нарисуйте отрезок. С помощью циркуля и линейки постройте перпендикуляр к нему в его конце.

3.59. а) Нарисуйте четыре луча так, чтобы два из них были биссектрисами образовавшихся при этом углов.

б) Можете ли вы нарисовать их так, чтобы каждый из них был биссектрисой какого-либо из образовавшихся углов?

в) Сможете ли вы нарисовать так три луча?

Задачи к пункту 3.9

А

3.60. Нарисуйте на глаз углы в 90°, 45°, 30°. Проверьте свой глазомер с помощью транспортира. Нарисуйте затем на глаз углы в 10°, 40°, 60°, 80°. Опять проверьте себя. Теперь нарисуйте углы в 120°, 135°, 150°. И опять проверьте себя.

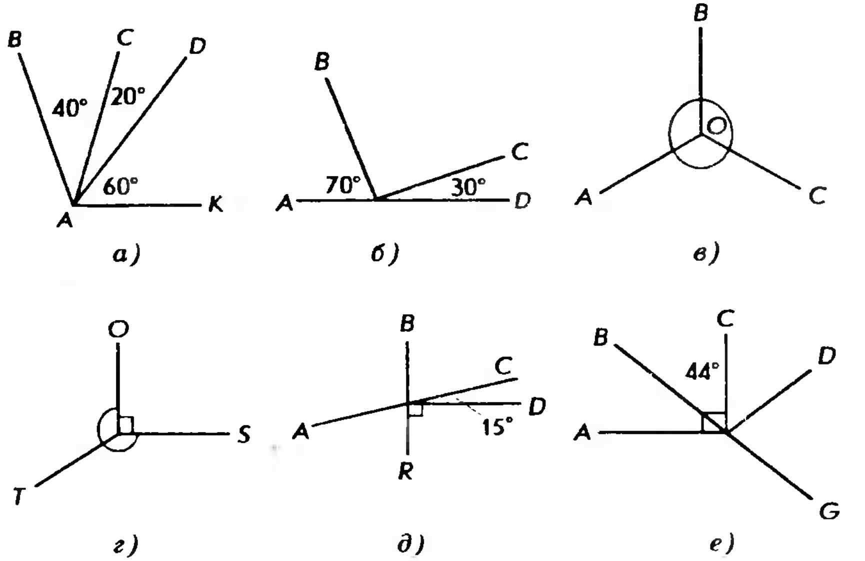


Рис. 242

3.61. Вычислите и измерьте величины всех углов на рис. 242.

3.62. Пусть угол $\alpha = 100°$. а) Угол β является смежным к углу α. Чему равна градусная мера угла β? б) Пусть угол $\gamma = 80°$. Будет ли угол γ смежным к углу α?

3.63. Углы α и β — смежные. Чему равен каждый из них, если: а) один из них больше другого на $90°$; б) один из них больше другого в 2 раза; в) $2\alpha = 3\beta$?

3.64. Пусть угол $\alpha = 35°$. а) Угол β является вертикальным к углу α. Чему равна градусная мера угла β? б) Пусть угол $\gamma = 35°$. Будет ли он вертикальным к углу α?

3.65. Внутри прямого угла провели луч. Вычислите градусную меру каждого из полученных при этом углов, если: а) один из них больше другого на $89°$; б) один из них в 90 раз больше другого; в) половина одного из них равна трети от другого.

3.66. Пусть $\angle\, ab = 50°$. а) Нарисуйте луч c внутри данного угла так, что $\angle\, ac = 30°$. Вычислите $\angle bc$. б) Вычислите тот же угол, если луч нарисовать вне данного угла. в) Изменится ли решение в случае б), если $\angle ac = 70°$?

3.67. Измерьте, какой угол образуют между собой указательный и средний пальцы одной руки при максимальном отклонении друг от друга. Запомните это число — может пригодиться.

3.68. Представьте себе компас. Какой угол образуют между собой такие направления: а) С и СВ; б) Ю и ЮЗ; в) В и СЗ; г) ЮВ и СВ; д) ЮЗ и СВ; е) ЗСЗ и ВСВ?

3.69. а) Сколько градусов содержится между двумя минутными делениями циферблата часов?

б) Сколько градусов образуют между собой стрелки часов, когда они показывают такое время: 13.00, 15.30, 14.45, 10.55, 21.01?

в) Назовите какое-либо время, когда стрелки часов образуют угол, равный такому числу градусов: 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 180°.

3.70. Пусть α и β — смежные углы. а) Запишите формулу, которая связывает между собой величины этих углов. б) Какой функцией является зависимость одной из этих величин от другой? Какова область ее определения? в) Нарисуйте график этой зависимости. г) Как ведет себя одна из этих величин при изменении другой? д) Составьте сами задачи на эту формулу.

3.71. Федя и Вася, каждый у себя, нарисовали отрезок AB, взяли внутри него точку O и построили прямой угол KOM. Потом они занялись углами AOK и BOM. Федя установил, что их сумма равна 90°. Вася же настаивает на том, что их разность равна 90°. Кто из них прав?

3.72. а) С помощью транспортира постройте угол, равный 70°. Уберите транспортир и постройте угол, равный 10°.

б) С помощью транспортира постройте угол, равный 17°. Уберите транспортир и постройте угол, равный 7°.

в) С помощью транспортира постройте угол, равный 65°. Уберите транспортир и постройте угол, равный 20°. (Убрав транспортир, вы можете пользоваться другими инструментами.)

В

3.73. Величины каких углов вы сможете найти на рис. 243?

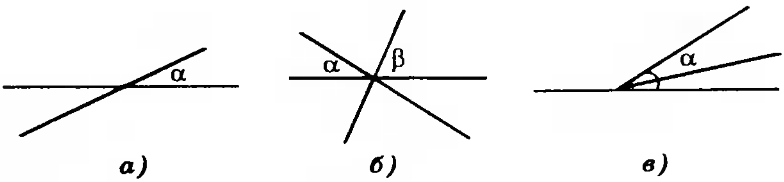


Рис. 243

3.74. Внутри прямого угла проведен луч. В каких границах лежит второй из полученных углов, если первый: а) больше 1°; б) меньше 89°; в) больше 44°, но меньше 46°; г) больше второго; д) больше второго, но меньше удвоенного второго?

3.75. Два угла величиной 40° и 50° имеют общую сторону.

а) Какой угол могут образовывать другие их стороны?

б) Ответьте на тот же вопрос, если даны углы 140° и 150°.

в) Решите задачу в общем случае, когда величины данных углов равны α и β.

3.76. Пусть $\angle ab = 120°$. а) Луч c лежит внутри данного угла и образует со стороной a угол 80°. Вычислите угол между лучом c и биссектрисой данного угла. б) Сделайте то же задание, если луч c лежит вне данного угла. в) Решите задачу в общем виде для произвольных значений углов α и β.

3.77. Углы ab и bc — смежные, луч p — биссектриса угла ab. Луч q идет внутри угла bc из его вершины. Докажите, что q — биссектриса угла bc, если угол pq — прямой.

3.78. Углы BAK и CAM — прямые. Угол CAK равен 10°. Вычислите угол BAM. Решите задачу в общем виде для произвольного по величине угла CAK.

3.79. Из точки A выходят три луча на плоскости: OA, OB, OC. Верно ли, что: а) $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$; б) $\angle AOB + \angle BOC + \angle AOB = 360°$?

ЗАДАЧИ К § 4

Вопросы для самоконтроля

▲ Что такое треугольник?

▲ Какие элементы треугольника вы знаете?

▲ Знаете ли вы, что такое медиана, биссектриса, высота треугольника?

▲ Какие по виду треугольники вы знаете?

▲ Какие элементы треугольника вы знаете?

▲ Является ли равносторонний треугольник равнобедренным?

▲ Может ли равнобедренный треугольник быть равносторонним?

▲ Приведите пример теоремы, уже доказанной в первой главе.

▲ Можете ли вы доказать теорему 1 на другом рисунке и с другими обозначениями?

▲ Какие треугольники называют равными?

▲ Какое свойство равных треугольников вы знаете?

▲ Какие признаки равенства треугольников вы знаете?

▲ Можете ли вы доказать первый признак равенства треугольников? А второй?

▲ Что такое тетраэдр? Чем он похож на треугольник? Какое у него еще есть название?

▲ Какие элементы тетраэдра вы знаете?

▲ Какой тетраэдр называют правильным?

▲ Чем правильный тетраэдр похож на правильный треугольник?

▲ Как сделать правильный тетраэдр?

▲ Какие многогранники кроме тетраэдров вы знаете?

Что такое правильная треугольная пирамида?

▲ Какие элементы правильной треугольной пирамиды вы знаете?

▲ Может ли правильная треугольная пирамида быть правильным тетраэдром?

▲ Как сделать правильную треугольную пирамиду?

Основные задачи

4.1. Докажите, что два прямоугольных треугольника равны, если катеты одного из них соответственно равны катетам другого.

4.2. Докажите, что два прямоугольных треугольника равны, если катет и прилежащий к нему острый угол одного из них равны катету и прилежащему к нему острому углу другого.

Задачи к пункту 4.1

А

4.3. Перечислите все треугольники на рис. 244.

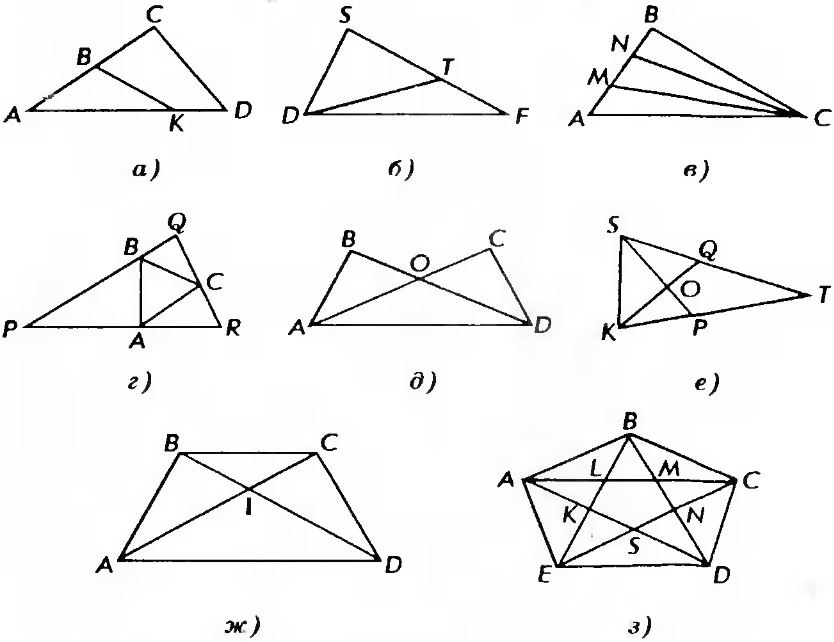


Рис. 244

4.4. а) Нарисуйте треугольник *ABC*. Продолжите его стороны: *AB* за вершину *B*, *BC* за вершину *C*, *CA* за вершину *A*. Соедините последовательно отрезками полученные точки. Сколько треугольников на этом рисунке?

б) Снова нарисуйте треугольник и каждую из его сторон продолжите в обе стороны. Полученные точки соедините последовательно отрезками. Сколько треугольников на этом рисунке?

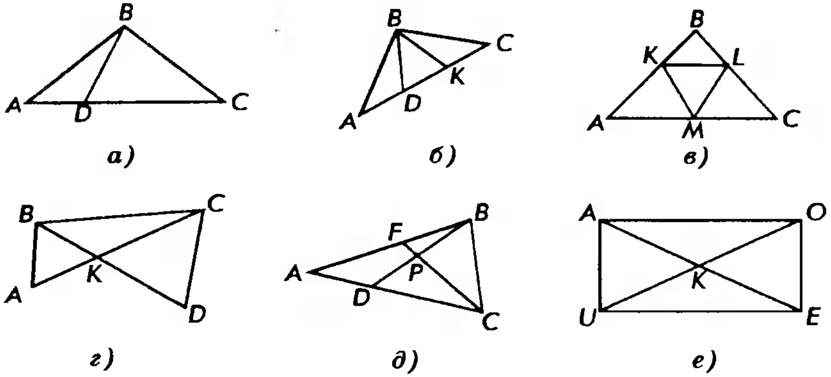


Рис. 245

4.5. Рассмотрите рис. 245. а) Выберите любую из обозначенных на нем точек. Назовите треугольники, в которых она является вершиной. Назовите стороны этих треугольников, которые лежат против нее. б) Выберите любой из обозначенных на нем отрезков. Назовите треугольники, в которых он является стороной. Назовите их вершины, которые лежат против нее.

4.6. Нарисуйте два треугольника: ABC и BCD. Какие еще треугольники можно нарисовать с вершинами в данных точках?

4.7. Представьте себе два треугольника: ABC и AKL. Какие еще треугольники можно нарисовать с вершинами в данных точках?

4.8. Эту задачу попробуйте сделать без рисунка. В треугольнике KPT для каждого угла назовите противолежащую сторону и для каждой стороны назовите противолежащий угол и прилежащие углы. Потом сделайте рисунок и проверьте себя.

4.9. Нарисуйте отрезок AB и точку O вне прямой AB. Возьмите точку K на отрезке AB, проведите отрезок OK и продолжите его за точку K на равный отрезок. Проделайте такое построение несколько раз. Что можно заметить? Такие же построения проделайте с точкой и треугольником, с точкой и окружностью. Что можно заметить в этих случаях?

4.10. Нарисуйте треугольник. Проведите три прямые, параллельные одной его стороне и пересекающие треугольник. Сколько треугольников получилось на рисунке? Ответьте на тот же вопрос, если прямых проведено четыре, пять, некоторое число n.

4.11. На прямой взяты три точки, а вне ее взята точка A. Точку A соединили отрезками с точками на прямой. Сколько треугольников получилось на рисунке? Сколько получится треугольников, если на прямой взять 4, 5, n точек, где n — некоторое число?

4.12. Нарисуйте треугольник STK. В нем сторона ST лежит против вершины K. Как это можно сказать иначе? Сделайте то же для сторон SK и TK.

Б

4.13. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте треугольник A_1BD. Нарисуйте на его поверхности другой такой же треугольник, который не имеет с первым общих точек. Нарисуйте на его поверхности еще один такой же треугольник, имеющий с первым общую сторону. Сколько таких треугольников в прямоугольном параллелепипеде?

В

4.14. Нарисуйте треугольник. Теперь нарисуйте еще один треугольник так, чтобы в пересечении с первым треугольником получились: а) точка; б) отрезок; в) треугольник; г) четырехугольник; д) пятиугольник. Какие еще фигуры могут получиться в их пересечении? Нарисуйте отдельно фигуры, которые получились в объединении этих треугольников. Какие это многоугольники? (Сколько у них сторон?)

4.15. Нарисуйте треугольник. Пристройте к нему другой треугольник так, чтобы в их объединении получились: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник. Можно ли получить путем пристраивания треугольников другие многоугольники? (Пристроить два треугольника друг к другу — значит, нарисовать их в таком положении, что их пересечением является либо общая сторона, либо общий отрезок — ее часть.)

4.16. Нарисуйте треугольник. Объясните, почему его можно считать: а) объединением двух треугольников; б) пересечением двух треугольников; в) объединением треугольника и круга; г) пересечением треугольника и круга.

Задачи к пункту 4.2

А

4.17. Отметьте в тетради четыре вершины квадрата со стороной в две клеточки. Отметьте также середины его сторон и точку пересечения его диагоналей. У вас окажутся отмеченными девять точек (рис. 246). Рассмотрим треугольники с вершинами в этих точках. Сколько из них: а) прямоугольных; б) остроугольных; в) тупоугольных; г)равнобедренных; д) равносторонних; е) прямоугольных равнобедренных; ж) остроугольных равнобедренных? Каких здесь треугольников больше: тупоугольных среди равнобедренных или равнобедренных среди тупоугольных?

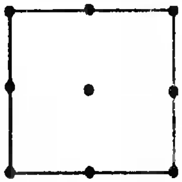


Рис. 246

Б

4.18. Нарисуйте треугольник. С помощью циркуля проверьте, есть ли у него равные стороны.

4.19. Нарисуйте равносторонний треугольник. Прямолинейными отрезками (разрезами) разбейте (разрежьте) его на: а) два прямоугольных треугольника; б) три прямоугольных треугольника; в) три равнобедренных треугольника; г) четыре равносторонних треугольника; д) семь равносторонних треугольников; е) прямоугольник и три треугольника.

Задачи к пункту 4.5

А

4.20. Нарисуйте два любых треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Пусть их вершины сопоставлены так: A и A_1, B и B_1, C и C_1. Назовите соответственные стороны этих треугольников.

4.21. Нарисуйте два любых треугольника: ABC и KLM. Пусть их вершины сопоставлены так: A и K, B и L, C и M. Назовите соответственные стороны этих треугольников.

4.22. А теперь попробуйте без рисунка. У двух треугольников ABC и KLM вершины сопоставлены так: A и L, B и M, C и K. Назовите соответственные стороны этих треугольников.

В

4.23. Нарисуйте два треугольника: ABC и KLM. Вершине A сопоставлена вершина M. Как могут быть сопоставлены другие вершины этих треугольников? Какие их стороны будут при этом соответственными?

4.24. Сколькими способами можно сопоставить вершины двух треугольников?

4.25. Треугольники MNP и STO сопоставили так, что их стороны MN и TO являются соответственными. Как были сопоставлены вершины этих треугольников?

Задачи к пунктам 4.6 — 4.8

А

4.26. Объясните, почему треугольники на рис. 247 равны. Укажите в них равные углы.

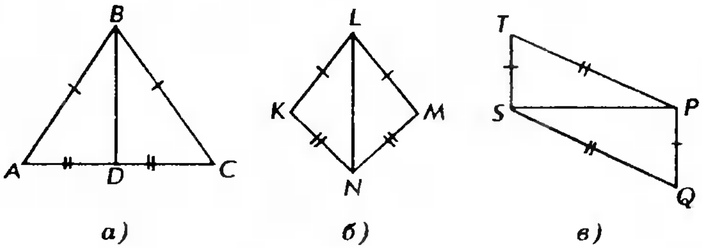


Рис. 247

4.27. Нарисуйте отрезок AB. а) С одной стороны от прямой AB нарисуйте два равных треугольника: ABC_1 и ABC_2. Назовите на этом рисунке равные отрезки и равные углы. б) С разных сторон от прямой AB нарисуйте два равных треугольника: ABC и ABK. Задание то же, что и в пункте а).

В

4.28. Докажите, что равные треугольники имеют равные периметры.

4.29. Какие треугольники на рис. 248 равны? Перечислите в них соответственно равные углы.

4.30. Посмотрите на рис. 249. Какие углы в этих четырехугольниках равны?

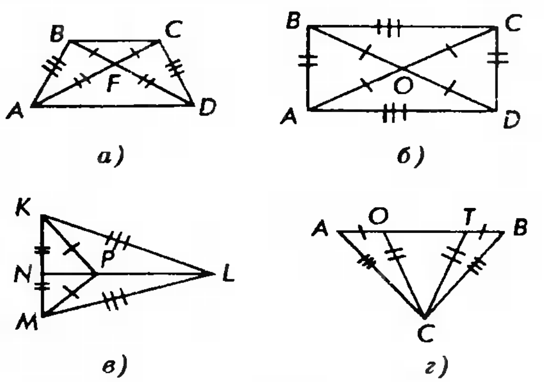


Рис. 248

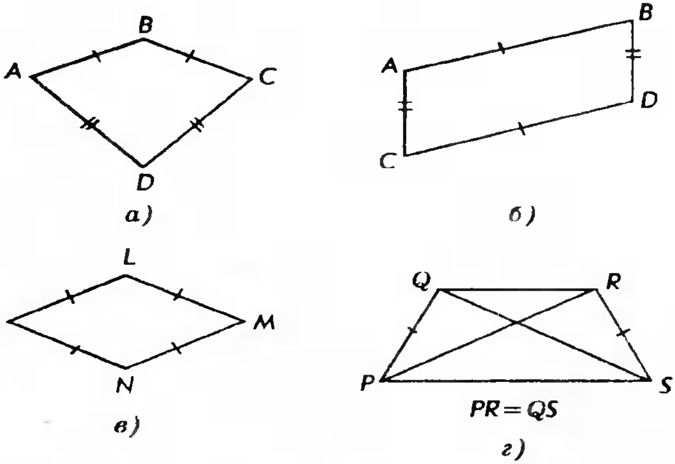


Рис. 249

4.31. Постройте две окружности с общим центром O (такие окружности называются концентрическими). а) На меньшей из них отметьте точку A, а на большей постройте две точки B_1 и B_2 такие, что $AB_1 = AB_2$. Докажите, что AB_1 и AB_2 видны из O под равными углами (иначе говоря, что углы AOB_1 и AOB_2 равны). б) Докажите аналогичное утверждение, взяв точку A на большей окружности, а точки B_1 и B_2 — на меньшей.

4.32. Нарисуйте окружность с центром O. а) Отметьте на ней точки A и B, не являющиеся концами одного диаметра. Постройте на ней точку C такую, что $AB = BC$. Докажите, что хорды AB и BC видны из центра окружности под равными углами. б) Отметьте на окружности по часовой стрелке точки A, B, C, D такие, что $AB = CD$. Докажите, что хорды AB и CD видны из центра под равными углами. в) Нарисуйте теперь хорды AC и BD. Если все указанные хорды лежат в одном полукруге, то хорды AC и BD также видны из центра под равными углами. Докажите это.

4.33. Постройте окружность с центром O_1. Отметьте на ней точку O_2. Постройте окружность с центром O_2 радиусом O_2O_1. Обозначьте символами A и B точки пересечения этих окружностей. а) Докажите, что отрезок AB виден из точек O_1 и O_2 под равными углами. б) Докажите, что O_1O_2 виден из точек A и B под равными углами.

Какое из этих утверждений будет верным, если радиус второй окружности не будет равен O_1O_2?

4.34. Постройте окружность с центром в точке O_1. Постройте еще одну окружность с центром в точке O_2 того же радиуса, причем так, чтобы эти окружности пересекались в двух точках. Назовите их A и B. Докажите, что: а) AB одинаково виден из точек O_1 и O_2; б) O_1O_2 одинаково виден из точек A и B.

Какое из этих утверждений будет верным, если радиусы построенных окружностей будут разными?

4.35. Нарисуйте окружность. Проведите в ней диаметр AB. На окружности отметьте точку A_1. С другой стороны от прямой AB на этой окружности отметьте точку B_1 так, что $AA_1 = BB_1$. Проведите отрезок A_1B_1. Если вы аккуратно работали, то увидите, что он прошел через центр данной окружности. Можете ли вы это объяснить?

4.36. Четыре точки A, B, K, L таковы, что $KA = KB$, $LA = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из точек A и B под равными углами.

4.37. а) Для каждой стороны треугольника ABC в треугольнике $A_1B_1C_1$ есть равная сторона. Найдется ли для каждой стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в треугольнике ABC равная сторона?

б) Для каждой стороны треугольника KMT в треугольнике $K_1M_1T_1$ есть равная сторона, и наоборот: для каждой стороны треугольника $K_1M_1T_1$ в треугольнике KMT есть равная сторона. Равны ли эти треугольники?

4.38. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$.

4.39. Даны два треугольника. Известно, что для каждой стороны одного из них в другом есть меньшая сторона. Докажите, что эти треугольники не равны.

4.40. Предположим, что у вас в руках два треугольника, и надо выяснить, равны ли они. Сколько сравнений сторон вам придется сделать?

Задачи к пункту 4.9

Б

4.41. а) Однажды Феде понадобилось построить десять равных треугольников. Как бы это сделать побыстрее?

б) В другой раз ему понадобилось построить десять треугольников, равных данному. А как справиться побыстрее с этим заданием?

4.42. В землю вбито два кола. Коза привязана веревкой к каждому из этих колов. Она ест траву. а) Где она находится, когда обе веревки натянуты? б) Нарисуйте фигуру, с которой будет съедена трава.

В

4.43. Нарисуйте треугольник. Постройте отрезок, равный одной из его сторон. На этом отрезке постройте треугольник, равный данному. Сколько таких треугольников можно построить?

4.44. Постройте треугольник, стороны которого равны: а) 4 см, 5 см, 6 см; б) 5 см, 5 см, 6 см; в) 5 см, 5 см, 5 см. Попытайтесь построить треугольник со сторонами 4 см, 5 см, 10 см. Какой вы сделаете после этого вывод?

4.45. Нарисуйте треугольник. В другом месте постройте треугольник с такими же сторонами.

4.46. Нарисуйте треугольник ABC. С центром в точке A постройте окружность радиусом BC, а с центром в точке B постройте окружность радиусом AC. Обозначьте точки их пересечения через D_1 и D_2. Пусть точка D_1 лежит с той же стороны от прямой AB, что и точка C, а точка D_2 — с другой стороны. Соедините точку D_1 с точками A, B и C, а точку

D_2 — с точками A и B. Какие равные треугольники получились на этом рисунке? Какие углы здесь равны?

4.47. Нарисуйте отрезок и возьмите точку вне его. Из этой точки данный отрезок виден под некоторым углом. Постройте отрезок, равный данному, который виден из данной точки под таким же углом.

Задачи к пунктам 4.10 и 4.11

Первый признак равенства треугольников

А

4.48. На рис. 250 назовите равные треугольники. Укажите в них соответственно равные стороны и углы.

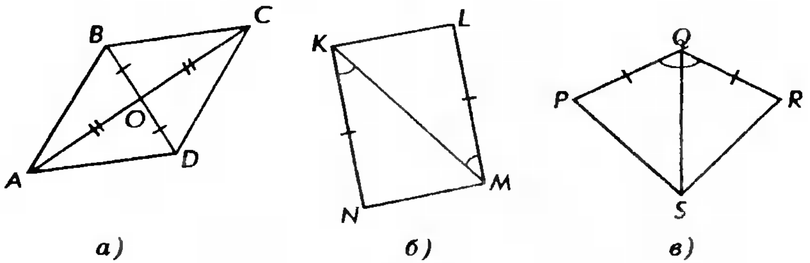


Рис. 250

4.49. а) Какие из указанных на рис. 251 точек равноудалены друг от друга?

б) Рассмотрите углы, заданные тремя из названных на рис. 252 точек. Какие из них равны?

Б

4.50. По рис. 253 объясните, как измеряют расстояние между двумя пунктами X и Y на разных краях озера.

В

4.51. На рис. 254 найдите равные треугольники. Укажите в них соответственно равные стороны и углы.

4.52. Нарисуйте два равных треугольника. Отметьте середины соответственно равных сторон. Соедините их отрезками с противоположными вершинами. Какие еще треугольники на этом рисунке равны? Укажите на нем равные отрезки и равные углы.

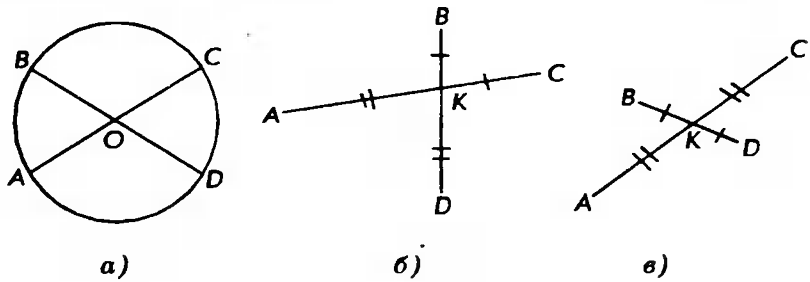


Рис. 251

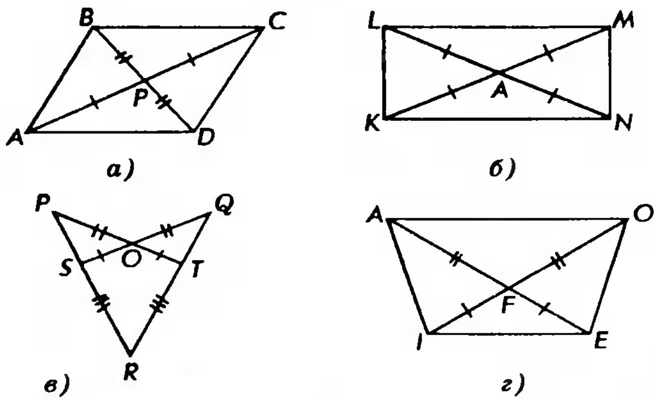


Рис. 252

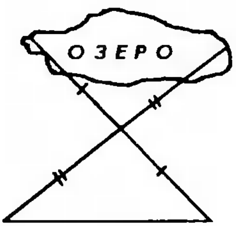


Рис. 253

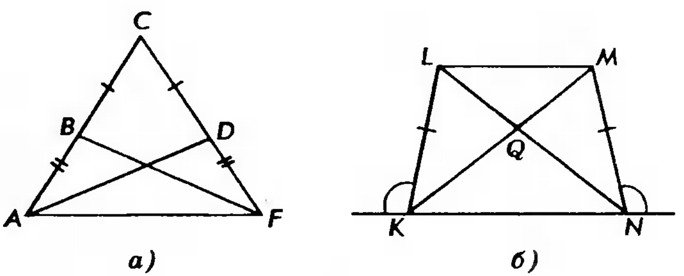
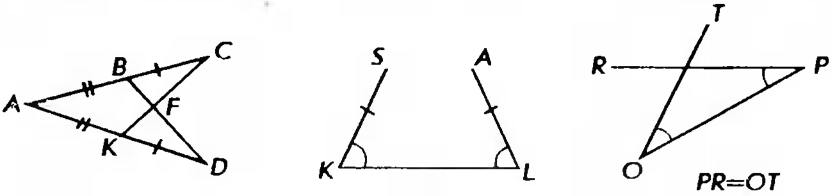


Рис. 254

4.53. Нарисуйте два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. При этом $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. а) Пусть точки K и K_1 лежат на сторонах AB и A_1B_1, причем $AK = A_1K_1$; точки L и L_1 лежат на сторонах BC и B_1C_1, причем $BL = B_1L_1$; точки M и M_1 лежат на сторонах CA и C_1A_1, причем $CM = C_1M_1$. Нарисуйте треугольники KLM и $K_1L_1M_1$. Какие еще треугольники равны на этом рисунке?

б) Ответьте на тот же вопрос, если точки K, K_1, L, L_1, M, M_1 брать не на сторонах треугольников, а на их продолжениях за соответствующие вершины?

4.54. а) Какие из имеющихся точек на рис. 255 равноудалены друг от друга?



а) б) в)

Рис. 255

б) Рассмотрите углы, заданные тремя из названных на рис. 256 точек. Какие из них равны?

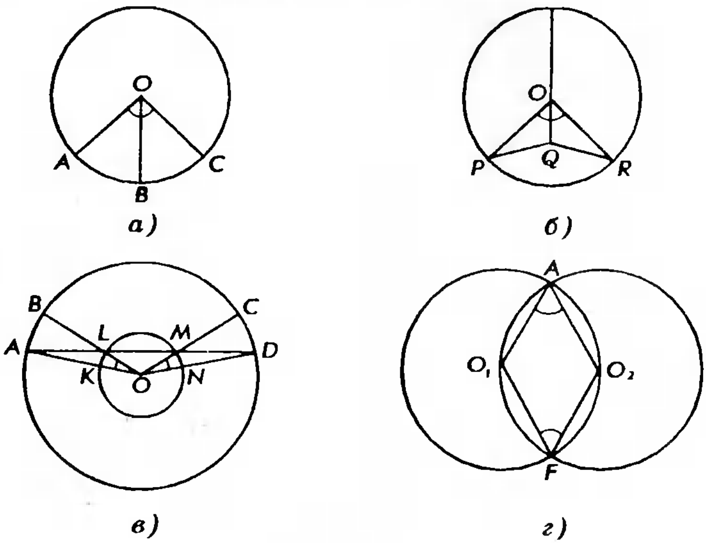


Рис. 256

4.55. Нарисуйте угол POQ. Нарисуйте его биссектрису. На сторонах угла отложите равные отрезки OA и OB, а на биссектрисе отметьте точку C. Докажите, что: а) $CA = CB$; б) луч CO — биссектриса $\angle ACB$; в) $AB \perp OC$.

4.56. Нарисуйте окружность. Пусть две ее хорды AB и CD видны из центра O под равными углами. Докажите, что эти хорды равны.

4.57. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте луч AA_1, не лежащий на прямой AB. Нарисуйте с другой стороны от прямой AB луч BB_1 такой, что $\angle A_1AB = \angle B_1BA$. На луче AA_1 отметьте любую точку K, а на луче BB_1 отложите $BP = AK$. Проведите KP. Докажите, что: а) KP проходит через середину AB; б) KP делится отрезком AB пополам.

4.58. Нарисуйте окружность, а в ней — диаметр AB. Пусть две точки окружности одинаково удалены от A. Докажите, что они одинаково удалены от B.

4.59. Нарисуйте окружность, а в ней — диаметр AB. Пусть две точки окружности C и D таковы, что $AC = BD$. Докажите, что $AD = BC$. (Здесь надо рассмотреть два случая — какие?)

Второй признак равенства треугольников

А

4.60. На рис. 257 найдите равные треугольники. Укажите в них соответственно равные стороны и углы.

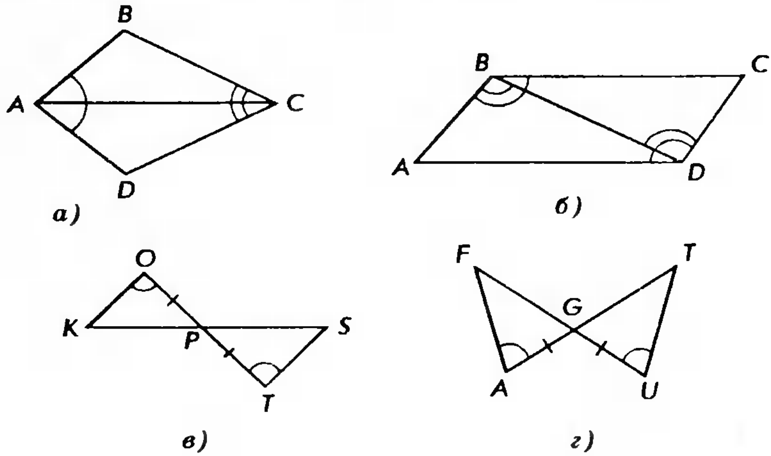


Рис. 257

Б

4.61. По рис. 258 объясните, как измеряют расстояние от данной точки до недоступного объекта.

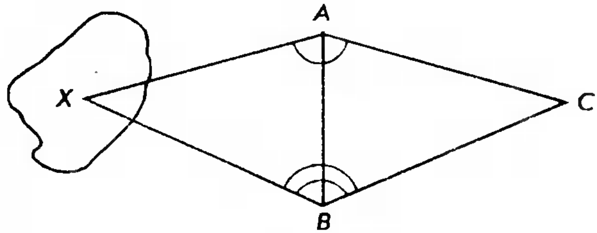


Рис. 258

4.62. Предложите способ измерения расстояния от Земли до Луны.

4.63. Корабль плывет на север. В некоторый момент маяк виден с корабля на северо-востоке, а спустя 4 мили — на юго-востоке. Сможете ли вы узнать, каково расстояние от корабля до маяка во второй точке?

В

4.64. На рис. 259 укажите равные треугольники. Укажите в них соответственно равные стороны и углы.

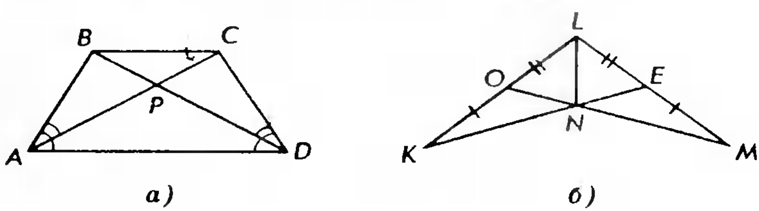


Рис. 259

4.65. Нарисуйте два равных треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. При этом $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. а) Проведите луч из точки A, который пересекает сторону BC в точке K. Нарисуйте во втором треугольнике луч из вершины A_1, составляющий с лучом A_1B_1 угол, равный $\angle KAC$, и пусть он пересекает сторону B_1C_1 в точке K_1. Какие еще треугольники равны на вашем рисунке? б) Ответьте на тот же вопрос, если точка K лежит на прямой BC вне отрезка BC.

4.66. Нарисуйте два равных треугольника, а в них — биссектрисы соответственно равных углов. Докажите, что они равны.

4.67. В двух равных треугольниках проведены биссектрисы двух соответственно равных углов. Сделайте рисунок. Какие еще треугольники на этом рисунке равны?

4.68. Нарисуйте два равных треугольника: ACB_1 и ACB_2. (При этом возможны три случая — какие?) Проведите отрезок B_1B_2. Какие еще треугольники на этом рисунке равны? Какие равенства отрезков и углов можно получить отсюда?

Задачи на равенство прямоугольных треугольников

А

4.69. На рис. 260 укажите равные треугольники: сначала прямоугольные, а потом, если есть, и другие.

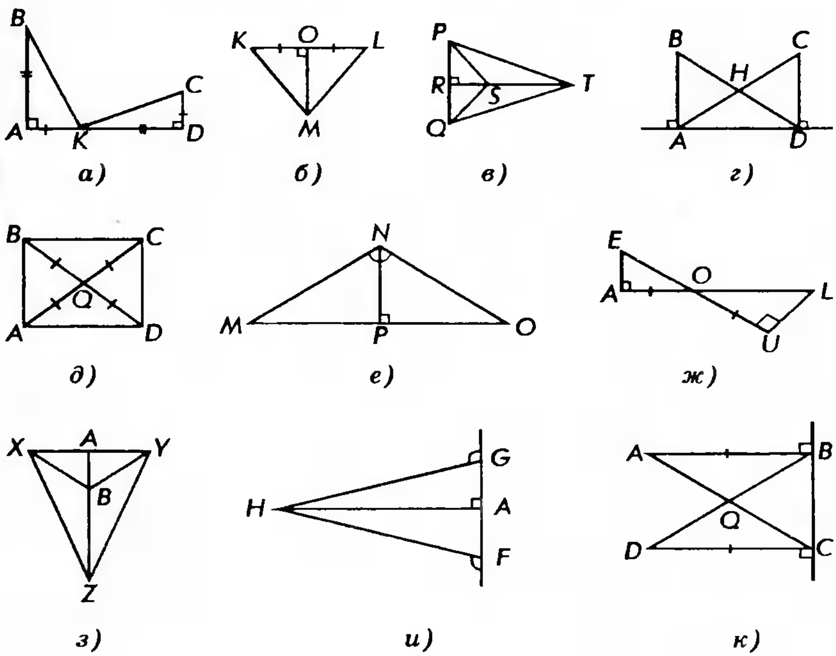
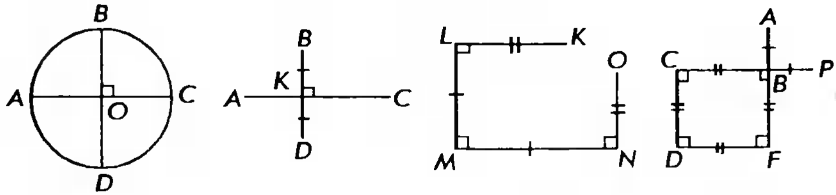


Рис. 260

4.70. Между какими обозначенными на рис. 261 точками расстояния равны?



а) б) в) г)

Рис. 261

В

4.71. Нарисуйте угол и его биссектрису. Через точку на биссектрисе проведите прямую, ей перпендикулярную. Докажите, что она отсекает на сторонах угла равные отрезки.

4.72. Нарисуйте угол. На его сторонах отложите от вершины равные отрезки. Через концы этих отрезков проведите прямые, перпендикулярные к тем, на которых они лежат. Докажите, что полученные при этом построении хорды угла равны между собой.

4.73. Нарисуйте отрезок AB и два луча с вершинами в точках A и B, лежащие с одной стороны от прямой AB и образующие с ней равные острые углы. Обозначьте точку пересечения этих лучей через C. Через середину отрезка AB проведите перпендикулярную к AB прямую. Объясните, почему эта перпендикулярная прямая не может пройти мимо точки C.

4.74. а) Нарисуйте отрезок AB. Через точки A и B проведите перпендикулярные к AB прямые a и b. Через середину AB проведите любую прямую. Пусть она пересекает прямые a и b в точках A_1 и B_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1$.

б) Нарисуйте отрезок AB. В его концах проведите два равных перпендикуляра: AA_1 и BB_1. Проведите отрезок A_1B_1. Верно ли, что он проходит через середину отрезка AB?

А

4.75. Нарисуйте треугольник *ABC*. Постройте треугольник *ABK*, равный треугольнику *ABC* по двум сторонам и углу между ними. Сколько таких треугольников вы построите?

4.76. а) Постройте треугольник со сторонами 3 см, 4 см и углом между ними 70°. Измерьте третью сторону этого треугольника и вычислите его периметр.

б) Постройте треугольник со сторонами 5 см, 5 см и углом между ними 150°. Вычислите его периметр.

4.77. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 4 см. Вычислите его периметр.

4.78. Нарисуйте треугольник *ABC*. Постройте треугольник *ABK*, равный треугольнику *ABC* по стороне и двум углам при этой стороне. Сколько таких треугольников можно построить?

4.79. а) Постройте треугольник по стороне 3 см и углам 30° и 120° при этой стороне. Измерьте две другие его стороны и вычислите его периметр.

б) Постройте прямоугольный треугольник по катету 4 см и острому углу при нем 60°. Вычислите его периметр.

Б

4.80. Федя нарисовал на бумаге треугольник и собирался вычислить его периметр. Пришел Вася и оторвал часть треугольника вместе с вершиной. Помогите Феде сделать то, что он хотел.

4.81. На листе бумаги нарисуйте треугольник. Одними только сгибаниями листа полу́чите треугольник, равный данному.

4.82. Сможете ли вы восстановить треугольник по таким оставшимся на рисунке его элементам: а) медиане и еще одной вершине; б) медиане и середине еще одной стороны; в) одной медиане; г) высоте и еще одной вершине; д) двум высотам; е) двум вершинам и точке пересечения высот; ж) высоте и медиане из одной вершины; з) высоте и медиане из разных вершин; и) высоте и биссектрисе из разных вершин; к) медиане и биссектрисе из разных вершин; л) высоте и биссектрисе из одной вершины; м) медиане и биссектрисе из одной вершины; н) стороне и точке пересечения биссектрис углов треугольника, прилежащих к этой стороне?

4.83. В треугольной пирамиде противоположные ребра равны между собой. (Таких ребер в ней три пары. Укажите их.) Докажите, что все ее грани равны.

4.84. Нарисуйте треугольную пирамиду $PABC$. Пусть углы в гранях PAB, PBC, PAC при вершине P равны, а ребра PA, PB, PC равны между собой. Докажите, что в этой пирамиде равны между собой ребра AB, BC, AC.

4.85. Если в основании пирамиды $PABC$ лежит равносторонний треугольник ABC, а боковые ребра PA, PB, PC равны, то пирамида называется правильной треугольной. а) Пусть K, L, M — середины ребер AC, AB, BC. Докажите, что $PK = PL = PM$. б) Пусть точка N — середина ребра PA. Докажите, что треугольник CNB — равнобедренный. Будет ли он равнобедренным, если N — другая точка внутри этого ребра? А вне его на прямой PA? в) Пусть точка Q — середина ребра PB. Докажите, что треугольник CNQ — равнобедренный. г) Пусть точка S — середина ребра PC. Докажите, что треугольник NQS — равносторонний. д) Нарисуйте другие равносторонние треугольники на поверхности этого тетраэдра.

4.86. Пусть в треугольной пирамиде $PABC$ все ребра равны, а точка K лежит внутри ребра AC. Докажите, что треугольник PKB — равнобедренный.

4.87. В тетраэдре $PABC$ $AB = AC$, $\angle PAC = \angle PAB = 90°$. а) Докажите, что треугольник PBC — равнобедренный. б) При каком дополнительном условии треугольник PBC будет равносторонним?

4.88. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите такие его вершины, которые являются вершинами равностороннего треугольника. Какие вы выберете точки K и L на ребрах DA и DC, чтобы треугольник D_1KL оказался равнобедренным?

4.89. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметьте точки B, D, A_1, C_1. а) Объясните, почему они являются вершинами правильного тетраэдра. б) Какие еще четыре вершины этого куба являются вершинами правильного тетраэдра?

4.90. Докажите, что равны углы: а) между любыми гранями правильного тетраэдра; б) между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды и основанием; в) между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды.

4.91. Треугольники ABC, BCD, ACD, ABD — равнобедренные. Сделайте рисунок.

ЗАДАЧИ К § 5

Вопросы для самоконтроля

- Какие вы знаете равнобедренные треугольники на практике?
- Какими свойствами обладает равнобедренный треугольник?
- Как можно обеспечить вертикальную установку мачты?
- Что такое серединный перпендикуляр?
- Какие свойства есть у серединного перпендикуляра?
- Приведите примеры взаимно обратных теорем, таких, что: а) обе они верны; б) верна только одна из них.
- Какая прямая называется осью симметрии фигуры?
- «Обязана» ли фигура иметь ось симметрии?
- Сколько осей симметрии может иметь фигура?
- Какие свойства есть у фигур, имеющих ось симметрии?
- Приведите примеры пространственных фигур, имеющих ось симметрии.
- Какой вы знаете признак равнобедренного треугольника?
- Можете ли вы доказать признак равнобедренного треугольника?
- Как разделить пополам отрезок, действуя лишь циркулем и линейкой?
- Как провести перпендикуляр из точки на прямую, действуя лишь циркулем и линейкой?

Основные задачи

5.1. а) Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

б) Докажите, что треугольник, все углы которого равны, равносторонний.

5.2. Из вершины равнобедренного треугольника проведена его биссектриса. Докажите, что она является его: а) медианой; б) высотой.

5.3. а) В равнобедренном треугольнике из вершин основания провели медианы. Докажите, что они равны.

б) Докажите аналогичное утверждение для биссектрис.

в) Докажите аналогичное утверждение для высот.

г) Что следует из доказанных утверждений для равностороннего треугольника?

5.4. Докажите такие признаки равнобедренного треугольника: треугольник является равнобедренным, если совпадают его высота и: а) медиана; б) биссектриса. Какие из этого вытекают признаки равностороннего треугольника?

5.5. Нарисуйте отрезок. Нарисуйте окружность, которая проходит через его концы. Докажите, что ее центр лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.

5.6. Нарисуйте треугольник. Постройте серединные перпендикуляры двух его сторон. Пусть O — точка их пересечения. Докажите, что: а) O равноудалена от всех вершин треугольника; б) O лежит на серединном перпендикуляре третьей стороны треугольника.

Задачи к пункту 5.1

А

5.7. а) Чему равен периметр равностороннего треугольника, у которого сторона равна 1 м?

б) А чему равна сторона, если периметр равен 1 м?

5.8. а) Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2 м, а основание равно 1 м. Чему равен его периметр?

б) Пусть периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, а боковая сторона равна 40 см. Чему равно его основание?

в) Пусть периметр равнобедренного треугольника равен 15 дм, а основание равно 24 см. Чему равна его боковая сторона?

5.9. Запишите выражение для периметра p равнобедренного треугольника, в котором: а) боковая сторона равна x, а основание на 12 длиннее; б) основание равно a, а боковая сторона на 1 короче; в) боковая сторона равна b и в два раза длиннее основания. Вычислите стороны этих треугольников, когда периметр равен 10.

5.10. а) Чему равен периметр p равностороннего треугольника с данной стороной a?

б) На сколько увеличится периметр, если длина стороны увеличилась на x?

в) На сколько уменьшился периметр, если длина стороны уменьшилась на y?

г) Что происходит с периметром, если длину стороны умножить на число k?

д) В каких границах находится периметр, если длина стороны a больше 1 м, но меньше 2 м?

е) Выразите из полученной в пункте а) формулы длину стороны треугольника.

ж) Пусть периметр изменился на величину p_1. Как изменилась сторона треугольника?

з) Пусть периметр увеличился в 5 раз. Что произошло со стороной?

и) Пусть периметр уменьшился в k раз. Что произошло со стороной?

к) Как называется зависимость между периметром и стороной, полученная в пункте а)?

л) Нарисуйте график зависимости, полученной в пункте а).

5.11. а) Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, а основание равно b. Запишите формулу для его периметра p.

б) Выразите из этой формулы длину основания, длину боковой стороны.

в) Как называется зависимость между периметром и основанием при постоянной боковой стороне?

г) Как называется зависимость между периметром и боковой стороной при постоянном основании?

д) Как называется зависимость между основанием и боковой стороной при постоянном периметре?

е) Можете ли вы построить графики этих зависимостей?

ж) Придумайте сами задачу, связанную с этой формулой. (Похожие задачи у вас уже были.)

5.12. На земле проведена прямая и на ней выбрана точка. Нужно провести прямую, перпендикулярную данной и проходящую через эту точку. Измерительных инструментов у вас нет. Сможете ли вы справиться с задачей?

5.13. Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, точка K — середина PA, точка M — середина BC. а) Нарисуйте треугольник на поверхности пирамиды, в котором KM является высотой. б) При каком дополнительном условии отрезок KM будет высотой еще в одном треугольнике, лежащем на поверхности пирамиды?

5.14. Сколько проволоки потребуется для изготовления каркаса: а) правильного тетраэдра с ребром 15 см; б) правильной треугольной пирамиды с ребром основания 20 см и боковым ребром 30 см?

В

5.15. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Отметьте на AB любую точку X. Проведите отрезок CX. а) Запишите выражения для периметров треугольников ACX и BCX через стороны соответствующих треугольников. б) Пусть AX больше, чем XB. Докажите, что периметр первого треугольника больше периметра второго. в) Докажите обратное: если периметр первого треугольника больше периметра второго, то AX больше, чем XB. г) Пусть $AX - XB = 1$. Вычислите разность периметров этих треугольников. д) Пусть разность этих периметров равна d. Чему равна разность отрезков AX и XB? е) Обобщите задачи г) и д).

5.16. Какие равные треугольники получатся, если в равностороннем треугольнике провести: а) одну медиану; б) две медианы; в) три медианы. Как изменятся полученные вами результаты, если исходный треугольник будет равнобедренным?

5.17. Из двух равных треугольников составляют четырехугольник, прикладывая их равными сторонами. Какие стороны и углы равны в этом четырехугольнике, если исходные треугольники: а) равносторонние; б) равнобедренные?

5.18. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC проведите медиану BK. На ней отметьте любую точку. Докажите, что: а) она равноудалена от точек A и C; б) из нее стороны BA и BC видны под равными углами; в) из нее отрезки KA и KC видны под равными углами? Изменятся ли полученные результаты, если точку взять на продолжении BK?

5.19. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B. Из вершины B одновременно и с одной и той же скоростью двинулись точки X и Y по сторонам BA и BC. Докажите, что в любой момент времени $XC = YA$.

5.20. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B. а) Проведите медианы из вершин A и C. Пусть K — точка их пересечения. Укажите на этом рисунке равные треугольники. Что следует из их равенства? б) Проделайте такую же работу с биссектрисами. в) Проделайте такую же работу с высотами.

5.21. Треугольники ABC и BCD — равнобедренные с общим основанием BC. Докажите, что треугольники ABD и ACD равны.

Задачи к пункту 5.2

А

5.22. Нарисуйте отрезок AB. а) Пусть точка K такая, что $KA = KB$. Постройте серединный перпендикуляр отрезка AB. Объясните, почему он проходит через точку K. б) Пусть точка L такая, что $LA \neq LB$. Объясните, почему она не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

5.23. На двух сторонах угла отметьте две точки, равноудаленные от его вершины. Эти точки соедините отрезком. Нарисуйте серединный перпендикуляр этого отрезка. Объясните, почему он пройдет через вершину угла.

5.24. Нарисуйте две точки A и B. Пусть точки K, L, M такие, что каждая из них равноудалена от точек A и B. Лежат ли точки K, L, M на одной прямой?

5.25. Постройте окружность. Отметьте на ней несколько точек. Каждые две из них соедините отрезком. Нарисуйте серединные перпендикуляры этих отрезков. Объясните, почему все они имеют общую точку.

5.26. а) Нарисуйте точки A и B и любую прямую a. Найдется ли на прямой a точка, равноудаленная от точек A и B? Если найдется, то сколько? Какую фигуру могут образовать все такие точки?

б) Замените прямую a из задачи а) некоторым отрезком. Ответьте на те же вопросы.

в) Решите аналогичную задачу для круга.

Б

5.27. Мимо двух поселков проходит шоссе. На нем нужно сделать остановку автобуса для жителей обоих поселков. Где вы предложите ее сделать? Сначала подумайте, из каких соображений следует выбрать место для остановки.

5.28. Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, точка K — середина AB. а) Нарисуйте серединный перпендикуляр отрезка AB, который лежит на поверхности пирамиды. б) Объясните, почему отрезок, соединяющий любую точку ребра PC и точку K, является серединным перпендикуляром AB. в) Какую фигуру в пирамиде заполнят все перпендикуляры отрезка AB?

В

5.29. Нарисуйте два равнобедренных треугольника с общим основанием. Проведите прямую через их вершины. Докажите, что: а) она перпендикулярна основанию; б) каждая ее точка равноудалена от вершин основания.

5.30. Пусть серединный перпендикуляр p отрезка AB пересекает его в точке O. Возьмите любую точку X прямой p. Докажите, что: а) отрезки OA и OB видны из точки X под равными углами. Как это можно сказать иначе? б) Отрезок OX виден из точек A и B под равными углами. в) Если точка Y — еще одна точка прямой p, то отрезок XY виден из точек A и B под равными углами.

5.31. Нарисуйте отрезок AB. Внутри него отметьте точки A_1 и B_1 такие, что $AA_1 = BB_1$. Нарисуйте точку X такую, что $XA = XB$. а) Докажите, что $XA_1 = XB_1$. б) Докажите обратное: если $XA_1 = XB_1$, то $XA = XB$.

5.32. а) Нарисуйте две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Докажите, что прямая AB — серединный перпендикуляр отрезка O_1O_2.

б) Докажите, что прямая O_1O_2 — серединный перпендикуляр отрезка AB. Как изменятся эти результаты, если окружности не будут равными?

Задачи к пункту 5.4

А

5.33. На рис. 262 найдите равнобедренные треугольники.

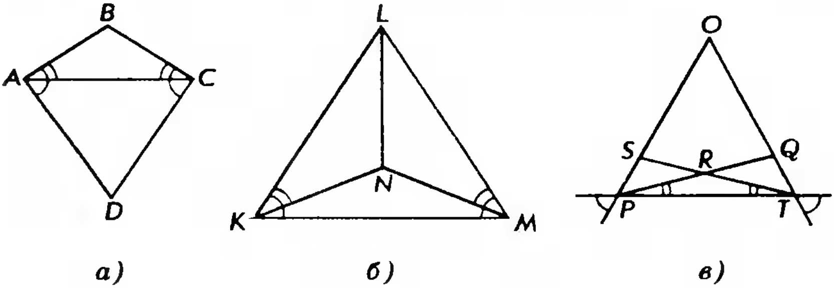


Рис. 262

5.34. Какие точки на рис. 263 являются вершинами равнобедренных треугольников?

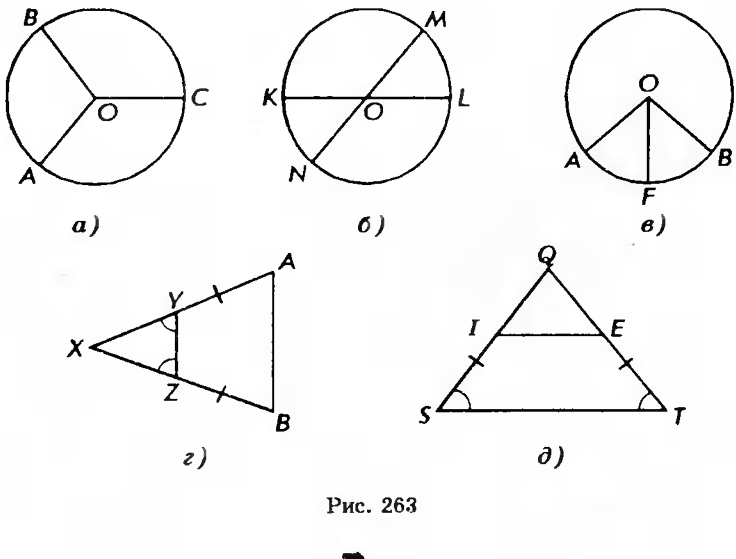


Рис. 263

Б

5.35. Одними только сгибаниями листа бумаги получи́те: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник.

5.36. Придумайте способ для определения недоступного расстояния (высоту башни, ширину реки), используя признак равнобедренного треугольника.

5.37. Сколько граней являются равнобедренными треугольниками в правильной: а) четырехугольной пирамиде; б) треугольной пирамиде; в) в правильном тетраэдре?

В

5.38. Названные точки на рис. 264 являются вершинами равнобедренных треугольников. Укажите эти треугольники.

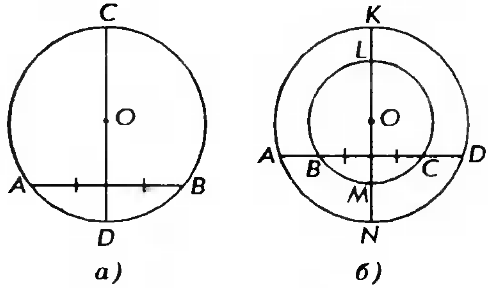


Рис. 264

5.39. На рис. 265 укажите равнобедренные треугольники.

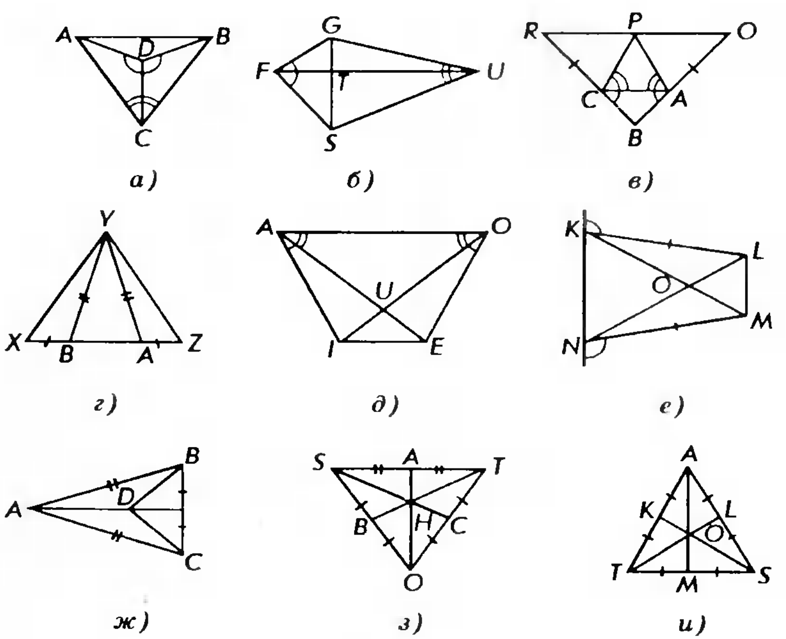


Рис. 265

5.40. На рис. 266 найдите вершины равносторонних треугольников.

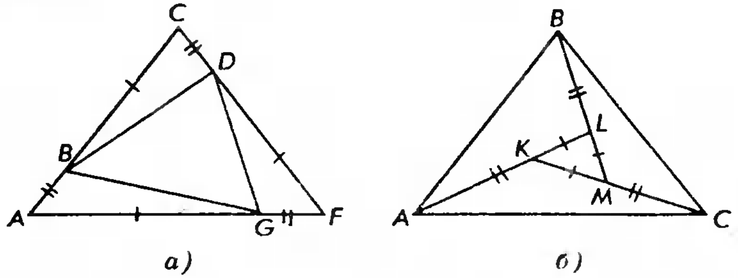


Рис. 266

5.41. Нарисуйте любой угол, а потом — его биссектрису. Отметьте на ней любую точку. а) Проведите через нее прямую, перпендикулярную биссектрисе. Докажите, что она отсекает от угла равнобедренный треугольник. б) Как, по-вашему, сможет ли такая прямая в некотором угле отсечь равносторонний треугольник?

Задачи к пункту 5.5

А

5.42. Нарисуйте треугольник. Постройте все его медианы. Что вы заметили?

5.43. а) Нарисуйте остроугольный треугольник. Постройте в нем две любые высоты. Отметьте точку их пересечения. При аккуратной работе она окажется внутри треугольника. Проведите третью высоту. Что вы заметили?

б) Проделайте то же самое в тупоугольном треугольнике. Есть ли разница в результатах по сравнению с задачей а)?

в) Проделайте такую же работу в прямоугольном треугольнике. В чем отличие полученных сейчас результатов по сравнению с пунктами а) и б)? А в чем сходство?

Б

5.44. Нарисуйте прямую, а на ней — отрезок AB. Сможете ли вы построить серединный перпендикуляр отрезка AB, работая циркулем и линейкой только с одной стороны от данной прямой?

5.45. Сможете ли вы построить серединный перпендикуляр отрезка, работая только одним из чертежных инструментов: а) линейкой; б) угольником?

5.46. Сможете ли вы восстановить треугольник ABC по таким оставшимся на рисунке его элементам: а) медиане AK и вершине B; б) медиане AK и середине T стороны AB; в) одной только медиане AK; г) высоте AP и вершине B; д) стороне AB и точке пересечения высот D; е) высоте AP и медиане AK; ж) высоте AP и медиане BM; з) высоте AP и биссектрисе AE; и) медиане AK и биссектрисе BF?

В

5.47. Постройте точку, равноудаленную от всех вершин: а) остроугольного треугольника; б) тупоугольного треугольника; в) прямоугольного треугольника. Какое предположение вы можете сделать? Можете ли вы его доказать?

5.48. Нарисуйте любой четырехугольник. а) Проверьте, есть ли такая точка плоскости, которая равноудалена от всех его вершин. б) Если такая точка нашлась, то лежит ли она внутри четырехугольника? Может ли она лежать на его стороне? в) Нарисуйте такой четырехугольник, для которого такой точки не существует. Как вы это объясните? г) Есть очень простой способ рисовать четырехугольники, для которых такая точка есть, и четырехугольники, для которых такой точки нет. Вы не могли бы придумать этот способ? Любопытно, что этот способ годится не только для четырехугольников, но вообще для любых многоугольников.

ЗАДАЧИ К § 6

Вопросы для самоконтроля

- ▲ В чем заключается теорема о внешнем угле треугольника?
- ▲ Можно ли из формулировки этой теоремы убрать слова «не смежного с ним»?
- ▲ Можно ли теорему о внешнем угле треугольника сформулировать так: «Внешний угол треугольника больше любого острого угла этого треугольника»?
- ▲ Какие следствия можно получить из теоремы о внешнем угле треугольника?
- ▲ В чем состоит метод доказательства «от противного»?
- ▲ Приведите пример доказательства «от противного».

- ▲ Можно ли сравнить стороны треугольника, сравнивая его углы? На чем основано такое сравнение?
- ▲ Можно ли сравнить углы треугольника, сравнивая его стороны? На чем основано такое сравнение?
- ▲ В чем состоит неравенство треугольника?
- ▲ Как вы будете доказывать неравенство треугольника?
- ▲ Как найти расстояние от точки до фигуры?
- ▲ Что надо доказывать при нахождении расстояния от точки до фигуры?
- ▲ Приведите примеры нахождения расстояний от точки до фигуры.
- ▲ Как найти расстояние: от точки до прямой; от точки до плоскости?

Основные задачи

6.1 а) Докажите, что любая сторона выпуклого четырехугольника меньше суммы остальных его сторон.

б) Будет ли это верно для невыпуклого четырехугольника?

в) Будет ли это верно для замкнутой пространственной ломаной из четырех звеньев?

г) Как вы сможете обобщить доказанные здесь утверждения?

6.2. а) У двух треугольников соответственно равны по две стороны, а угол между ними в первом треугольнике больше. Докажите, что и третья сторона в первом треугольнике больше.

б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задачи к пункту 6.1

A

6.3. Нарисуйте треугольник и все его внешние углы. Отметьте те из них, которые равны между собой. Сколько таких пар равных углов вы насчитали?

6.4. Нарисуйте треугольник ABC. Обозначьте те два внешних угла треугольника, которые содержат сторону AB. а) Закрасьте пересечение этих углов. Закрасьте тем же цветом аналогичные части плоскости.

б) Посмотрите теперь на те части плоскости, которые остались незакрашенными. Выберите одну из них. Будет ли она внешним углом треугольника? А будет ли она пересечением каких-либо внешних углов треугольника?

Б

6.5. Объясните, почему, приближаясь к высокому предмету, вы видите его под большим углом.

В

6.6. (Решите эту задачу перед доказательством теоремы о внешнем угле.) Докажите по рис. 267, что $\angle BCK > \angle B$.

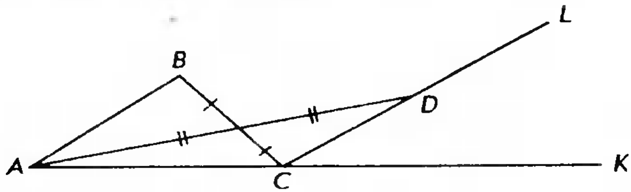


Рис. 267

6.7. Сколько может быть в треугольнике: а) тупых углов; б) прямых углов; в) острых углов?

6.8. В таблице на рис. 268 в каждой клеточке поставьте знак «+», если треугольник такого вида возможен, и поставьте знак «–», если такового не существует.

	остро-угольный	прямо-угольный	тупо-угольный
разно-сторонний			
равно-сторонний			
равно-бедренный			

Рис. 268

6.9. Из точки A провели перпендикуляр AB на прямую a. а) На AB взяли точку C и из нее провели перпендикуляр на a. Попадет ли он в точку B? б) AB продлили за точку A до точки D и провели перпендикуляр из D на a. Попадет ли он в точку B? в) AB продлили за точку B до точки K и провели перпендикуляр из K на a. Попадет ли он в точку B?

6.10. Опишите расположение высот треугольника по отношению к самому треугольнику, если треугольник: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. Можно ли по расположению высот треугольника относительно него установить его вид (по углам)?

6.11. Для каждой фигуры на рис. 269 проделайте такую работу: выберите какой-нибудь угол, затем выпишите углы, равные ему, потом большие его, потом меньшие его. Все ли при этом вы сможете обосновать?

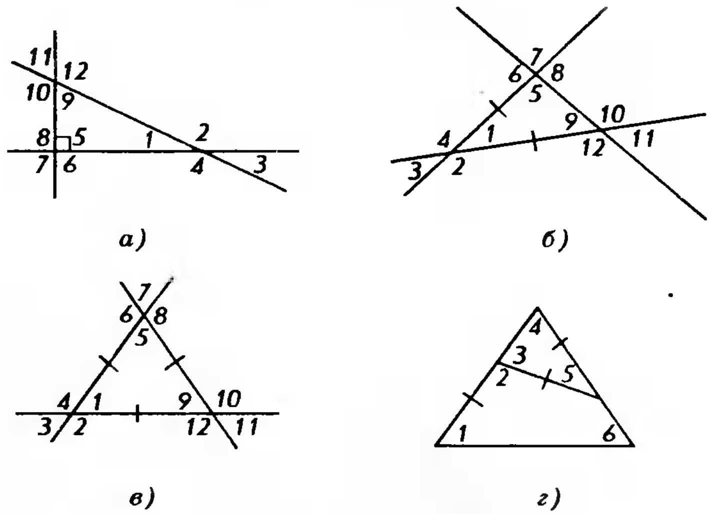


Рис. 269

6.12. 1) Оцените величину угла z на рис. 270, если: а) $\angle x = 40°$, $\angle y = 30°$; б) $\angle x = 50°$, $\angle y = 60°$; в) $\angle x > 30°$, $\angle y > 40°$; г) $\angle x > 30°$, $\angle y < 40°$; д) $\angle x > 30°$, $\angle y < 30°$. 2) Оцените величину угла y, если: е) $\angle x > 20°$, $\angle z < 100°$; ж) $\angle x > 20°$, $\angle z > 100°$.

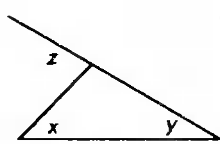


Рис. 270

6.13. Нарисуйте треугольник ABC. Отметьте точку X внутри этого треугольника. Докажите, что угол AXC больше угла ABC. Будет ли это верно, если сделать то же самое для четырехугольника?

6.14. а) По стороне AC треугольника ABC от A к C движется точка K. Как изменяется при этом угол AKB? А угол BKC?

б) Ответьте на тот же вопрос, если точка K продолжит свое движение за точку C.

в) Ответьте на аналогичные вопросы, если бы точка K двигалась от C к A.

6.15. Сформулируйте для внешнего угла четырехугольника утверждение, аналогичное теореме о внешнем угле треугольника. Будет ли оно верным?

Задачи к пункту 6.2

А

6.16. Назовите наибольший и наименьший углы в треугольнике ABC, если в нем: а) $a = 10$, $b = 9$, $c = 8$; б) $a = 10$, $b = 9$, $c = 9$; в) $a = 10$, $b = 10$, $c = 9$.

6.17. Сравните стороны, противолежащие углам A и B в треугольнике ABC, если: а) $\angle A = 30°$, $\angle B = 100°$; б) $\angle A = 30°$, $\angle B = 10°$; в) $\angle A = 30°$, $\angle B = 30°$.

6.18. Возможны ли такие данные о треугольнике ABC: а) $\angle A = 60°$, $\angle B = 50°$, $a = 5$, $b = 6$; б) $\angle A = 100°$, $\angle B = 50°$, $a = 6$, $b = 6$; в) $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$, $a = 10$, $b = 6$.

Б

6.19. Как сравнить углы треугольника, имея только: а) измерительную линейку; б) циркуль? Сколько операций вам потребуется для этого? Можно ли уменьшить их число? А сможете ли вы сравнить теми же инструментами углы четырехугольника?

6.20. Как сравнить между собой стороны треугольника, имея в руках только: а) транспортир; б) циркуль постоянного раствора? Сколько операций вам потребуется для этого? Можно ли уменьшить их число? А сможете ли вы сравнить теми же инструментами стороны четырехугольника?

6.21. Из двух охотников тот ближе к белке, сидящей на дереве, который видит это дерево под бо́льшим углом. Как вы это объясните?

В

6.22. Можно ли сказать, какой из углов треугольника ABC наибольший и наименьший, если: а) $AC > BC$, $AB = BC$; б) $AB > AC$, $AB > BC$?

6.23. Можно ли сказать, какая сторона в треугольнике STK наибольшая и наименьшая, если: а) $\angle S = \angle T$, $\angle T > \angle K$; б) $\angle S > \angle T$, $\angle S < \angle K$?

6.24. Что можно доказать исходя из рис. 271?

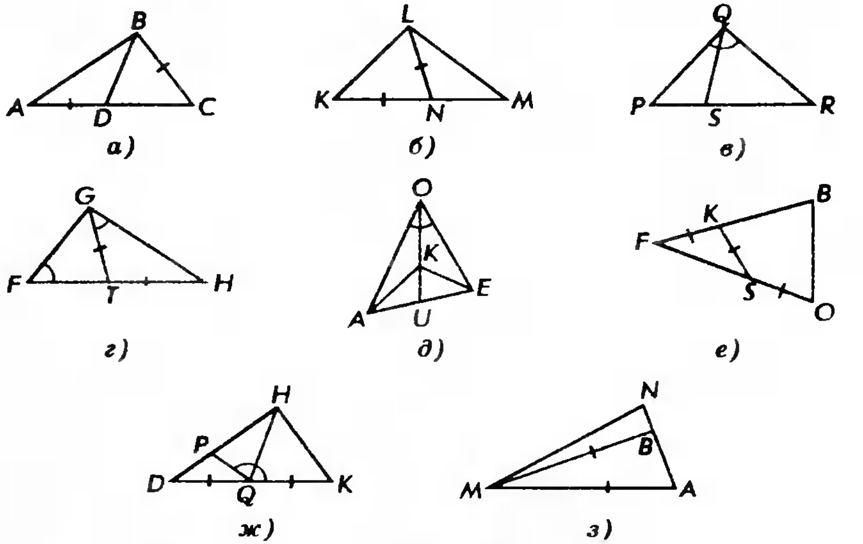


Рис. 271

6.25. Дан прямой угол ABC. На луче BC находится точка X. Что происходит с расстоянием AX при движении точки X по лучу BC: а) от точки B; б) к точке B? Изменятся ли полученные вами результаты, если данный угол не будет прямым?

6.26. а) Дан тупоугольный треугольник. Из вершины его тупого угла провели высоту. Докажите, что она меньше каждой стороны треугольника, выходящей из той же вершины.

б) Изменятся ли полученные вами результаты, если исходный треугольник не будет тупоугольным?

в) Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

6.27. Можно ли утверждать, что в четырехугольнике: а) против большей стороны лежит больший угол; б) против большего угла лежит бо́льшая сторона?

6.28. Какой бы отрезок внутри треугольника ни взяли, он будет меньше, чем наибольшая его сторона. Докажите это. Будет ли это верно для четырехугольника? Для других многоугольников? Как вы думаете, какое положение занимает в многоугольнике самый длинный отрезок, который в нем умещается?

Задачи к пункту 6.3

А

6.29. Выберите отрезок на рис. 272. Выберите треугольник, в котором он является стороной. Напишите для выбранного отрезка неравенство треугольника.

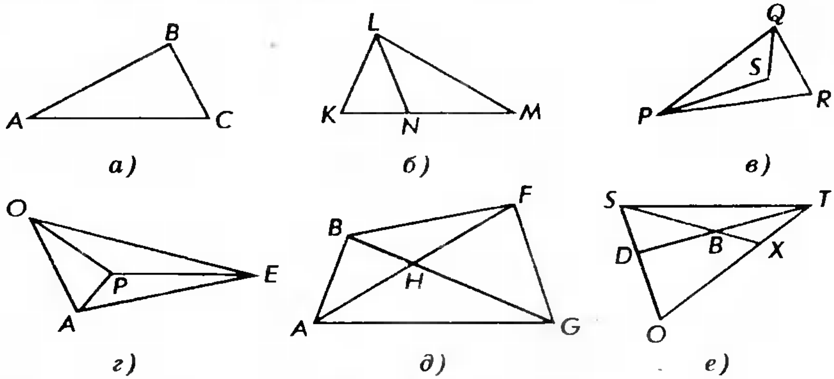


Рис. 272

6.30. Можно ли построить треугольники со сторонами: а) 10 см, 20 см, 100 см; б) 40 мм, 50 мм, 90 мм; в) 3 дм, 4 дм, 5 дм?

6.31. В треугольнике две стороны равны 1 и 2. Докажите, что третья сторона треугольника меньше, чем 3, но больше, чем 1.

Б

6.32. У вас в руках складной метр. Какие различные треугольники вы сможете из него сделать?

6.33. На рис. 273 сравните длины ломаных, идущих по поверхности куба.

6.34. Нарисуйте на поверхности куба кратчайшую ломаную, которая выглядит на трех проекциях так, как показано на рис. 274.

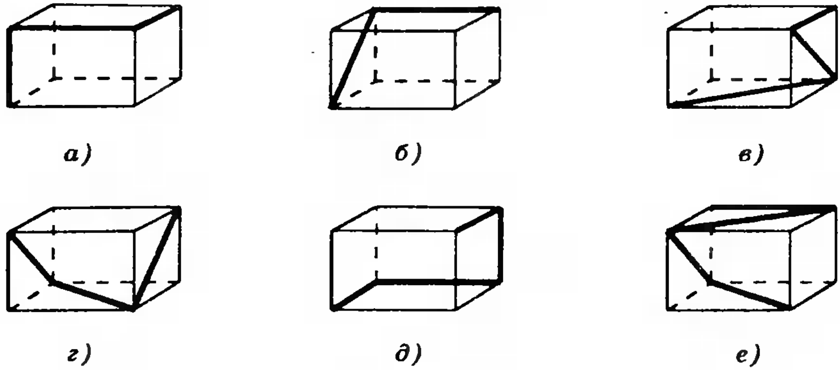


Рис. 273

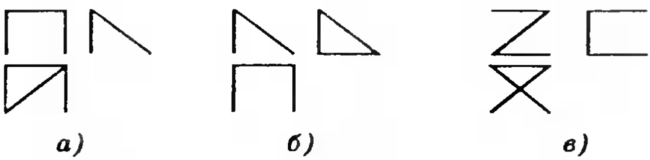


Рис. 274

6.35. Каков кратчайший путь по поверхности куба из центра одной грани в центр: а) соседней грани; б) противоположной грани?

В

6.36. В каких границах лежит третья сторона треугольника, если другие две его стороны равны: а) 1 дм и 2 дм; б) 2 дм и 2 дм; в) a и b?

6.37. В каких границах лежит периметр треугольника ABC, если: а) $a = 12$ см, $b = 15$ см; б) $a = 12$ см, 14 см $< b <$ 16 см; в) 11 см $< a <$ 13 см, 14 см $< b <$ 16 см?

6.38. а) Основание равнобедренного треугольника равно 20 см. Докажите, что его периметр больше 40 см.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см. Докажите, что его периметр меньше 40 см.

6.39. Пусть периметр равнобедренного треугольника равен 1 м. В каких границах лежит его основание? Его боковая сторона?

6.40. а) Две стороны равнобедренного треугольника равны 4 см и 7 см. Вычислите его периметр.

б) Две стороны равнобедренного треугольника равны 4 см и 8 см. Вычислите его периметр.

6.41. Отрезки AB и CD пересекаются в точке K. Докажите, что: а) $AK < AC + CK$; б) $KB < KD + BD$; в) $AB < AC + CD + DB$.

6.42. Точка K лежит на стороне BC прямоугольника $ABCD$. Докажите, что: а) $AK < AB + BK$; б) $KD > CD$; в) $AK + KD > AB + CD$.

6.43. Докажите, что медиана треугольника меньше, чем полусумма сторон, между которыми она находится. Верно ли это неравенство для другого отрезка, выходящего из вершины треугольника и идущего до противоположной стороны?

6.44. Нарисуйте выпуклый четырехугольник $ABCD$. а) Для его диагонали AC запишите неравенство треугольника из треугольника ABC. б) Сделайте то же самое для стороны AD из треугольника ACD. в) Докажите, что $AD < AB + CD + BC$. г) Верно ли это же неравенство для невыпуклого четырехугольника? д) Напишите аналогичные неравенства для других сторон четырехугольника. е) Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше его периметра.

6.45. Внутри данного треугольника ABC взяли точку O. Оцените сумму расстояний $OA + OB + OC$. (Иначе говоря, надо выяснить, какой величины, связанной с треугольником, она больше и какой величины она меньше.)

6.46. Может ли внутри треугольника находиться треугольник с бо́льшим периметром? Как можно обобщить полученный результат?

6.47. Внутри выпуклого четырехугольника найдите такую точку, что сумма расстояний от нее до всех его вершин является наименьшей. А есть ли такая точка в невыпуклом четырехугольнике?

6.48. Докажите, что для любых точек A, B, C выполняется неравенство $AB + BC \geq AC$.

Задачи к пункту 6.4

А

6.49. а) Расстояние от точки A до прямой a равно 2. Через точку A провели прямую, перпендикулярную a, и на этой прямой взяли точку B, удаленную от A на 1. Чему равно расстояние от B до a?

б) Какой получится результат, если $|Aa| = 1$, $AB = 2$?

Б

6.50. Пусть $AB \perp a$. Рассмотрим три величины: $|Aa|$, $|Ba|$, AB. Какая связь есть между этими величинами? (Иначе говоря, можно ли найти одну из них, зная остальные?) Как выглядит аналогичная задача в пространстве?

6.51. Пусть $AB \perp a$, точка C — середина AB. Рассмотрим три величины: $|Aa|$, $|Ba|$, $|Ca|$. Пусть две из них известны. Как найти третью? Как выглядит аналогичная задача в пространстве?

6.52. На сфере с центром O и радиусом 1 нарисована линия L. Чему равно расстояние от O до L?

В

6.53. Пусть $|Aa| = 1$. Есть ли на прямой a такая точка X, что: а) $AX = 1$; б) $AX = 2$; в) $AX = 0{,}5$? Если есть, то как ее найти?

6.54. Пусть $AB = 1$. Есть ли такая прямая, которая проходит через B и удалена от A на расстояние: а) 1; б) 2; в) 0.5? Если есть, то как ее провести?

6.55. а) Пусть $|Aa| = 2$. Точка X движется по окружности с центром в точке A и радиусом $R = 1$. В каких границах лежит $|Xa|$? б) А какой будет результат, если $|Aa| = 1$ и $R = 2$? Как выглядят аналогичные задачи в пространстве?

6.56. AB — диаметр окружности с центром O; $AB = 2$. Чему равно расстояние до окружности от: а) точки O; б) середины OB; в) середины AO; г) точки K такой, что B — середина AK? д) Пусть точка X движется по AB от A к B. Как изменяется при этом расстояние от X до окружности? Как выглядит аналогичная задача в пространстве?

6.57. Окружность и прямая не пересекаются. По прямой движется точка X. Как изменяется при этом расстояние от X до окружности? Как выглядит аналогичная задача в пространстве?

6.58. Нарисуйте прямую a. а) Нарисуйте несколько точек X таких, что $|Xa| = 1$. Как вы думаете, какую фигуру образуют все такие точки? Лежат ли все такие точки на одной прямой? б) Какую фигуру, по-вашему, образуют все такие точки X, что $|Xa| \le 1$? $|Xa| \ge 1$? в) А какой будет аналогичная задача в пространстве?

6.59. Нарисуйте точку A и прямую x такую, что $|Ax| = 1$. Нарисуйте еще несколько таких же прямых. Как вы думаете, какую фигуру образуют все такие прямые? А какой будет аналогичная задача для пространства?

6.60. Нарисуйте угол A и на одной его стороне — точку B. Теперь на другой его стороне поставьте произвольную точку X. Как найти расстояние от X до AB?

6.61. Пусть $ABCD$ — квадрат. Как найти расстояние до него от точки, находящейся вне его на: а) прямой AD; б) прямой AC; в) прямой KL, где точки K и L — середины противоположных сторон квадрата; г) прямой AL?

ЗАДАЧИ К § 7

Вопросы для самоконтроля

- ▲ Какими многоугольниками вы можете покрыть плоскость?
- ▲ Сможете ли вы покрыть плоскость фигурами, которые не являются многоугольниками?
- ▲ Что вы знаете о евклидовой геометрии?
- ▲ В чем состоит пятый постулат Евклида?
- ▲ Каких ученых-геометров вы знаете?
- ▲ В чем состоит аксиома прямоугольника?
- ▲ Какое вы знаете отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида?
- ▲ Чему равна сумма: а) острых углов прямоугольного треугольника; б) сумма углов любого треугольника?
- ▲ Как доказываются теоремы о сумме: а) острых углов прямоугольного треугольника; б) углов любого треугольника?
- ▲ Какое свойство внешнего угла треугольника вы узнали? Как его доказать?
- ▲ Можно ли сказать, что теорема о внешнем угле треугольника из предыдущего параграфа следует из доказанного сейчас следствия о внешнем угле?
- ▲ Чему равна сумма углов: а) четырехугольника; б) n-угольника?
- ▲ Как получить формулу для вычисления суммы углов n-угольника?
- ▲ Можно ли считать, что вы знаете формулу для вычисления суммы углов любого многоугольника? Подумайте сначала о четырехугольниках.

Основные задачи

7.1. Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

7.2. Докажите равенство прямоугольных треугольников по: а) катету и противолежащему острому углу; б) гипотенузе и острому углу.

7.3. Нарисуйте две пересекающиеся прямые. Нарисуйте точку, не лежащую на этих прямых. Проведите через нее прямые, перпендикулярные данным прямым. Докажите, что угол между проведенными прямыми равен углу между данными прямыми.

7.4. Нарисуйте прямоугольный треугольник, а в нем — высоту на гипотенузу. Докажите, что исходный треугольник и два полученных треугольника имеют соответственно равные углы.

7.5. а) Нарисуйте равносторонний треугольник, а в нем — одну медиану. Вычислите углы двух полученных треугольников.

б) Нарисуйте прямоугольный треугольник, у которого один из углов равен 30°. Докажите, что катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы.

в) Пусть в прямоугольном треугольнике один из катетов в два раза меньше гипотенузы. Докажите, что он лежит против угла в 30°.

Задачи к пункту 7.4

А

7.6. Вычислите острый угол прямоугольного треугольника, в котором есть угол: а) 62°; б) $78^\circ15'$; в) $89^\circ1'1''$.

7.7. Вычислите неизвестный угол на рис. 275.

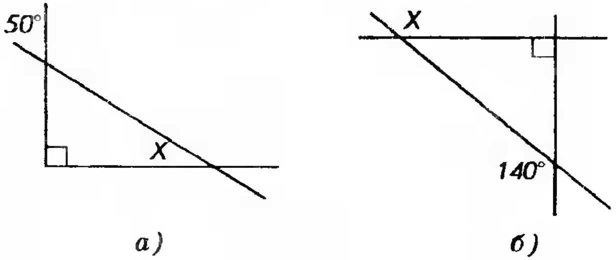


Рис. 275

7.8. Может ли прямоугольный треугольник иметь: а) тупой угол; б) три равные стороны?

Б

7.9. Пусть α и β — острые углы прямоугольного треугольника. а) Запишите формулу, связывающую эти величины. б) Выразите из нее каждый из углов. Как называется такая зависимость величин? в) Пусть один из острых углов прямоугольного треугольника увеличивается. Что происходит с другим? г) Составьте сами задачу на эту формулу.

7.10. Вы стоите на ровном участке склона. Придумайте способ для нахождения угла, который склон составляет с горизонтальной поверхностью.

7.11. Биллиардный шар пущен из угла биллиардного стола с отношением сторон 2:1 в противоположный борт под углом 45° к нему. Нарисуйте траекторию его движения после пяти отражений от бортов. (При этом угол падения равен углу отражения.) Сделайте то же в случае десяти отражений от бортов.

В

7.12. Вычислите острые углы прямоугольного треугольника, если известно, что: а) треугольник равнобедренный; б) один из углов в два раза больше другого; в) один из углов на 60° больше другого; г) их величины относятся как 2 : 3.

7.13. Вычислите неизвестный угол на рис. 276.

7.14. Вычислите неизвестный угол на рис. 277.

7.15. Нарисуйте угол. На его сторонах от вершины отложите два равных отрезка. Нарисуйте биссектрису этого угла. Из концов отрезков проведите перпендикуляры на биссектрису. Докажите, что они попадут в одну точку.

7.16. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные из вершин основания, равны.

7.17. В каких границах лежат углы прямоугольного треугольника: а) меньший; б) больший?

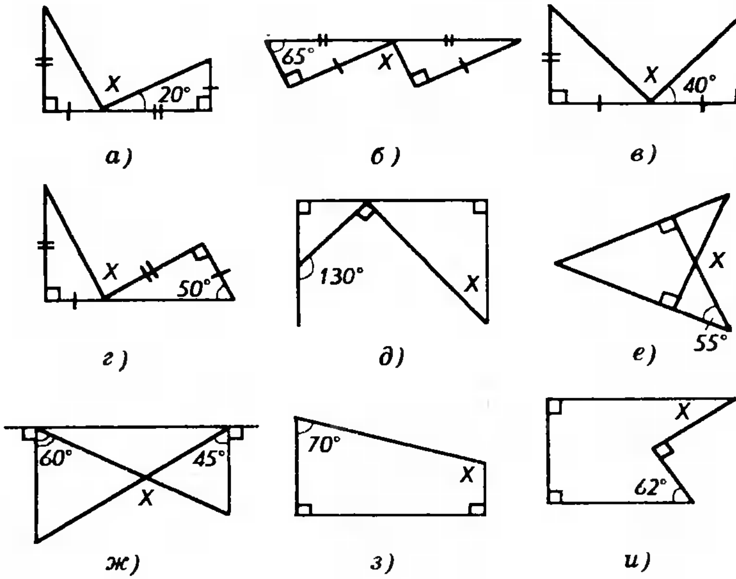


Рис. 276

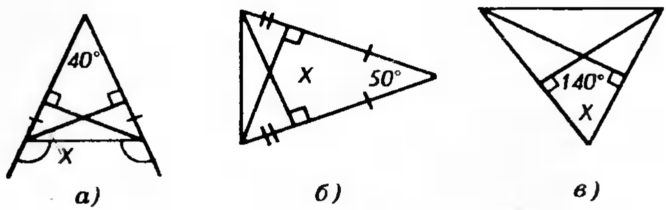


Рис. 277

Задачи к пункту 7.5

А

7.18. Вычислите третий угол треугольника, в котором два угла равны: а) 70° и 100°; б) 63° 20′ и 70° 40′; в) 10° 15′ 20″ и 20° 44′ 42″.

7.19. Вычислите неизвестный угол на рис. 278.

7.20. На рис. 279 дужками отмечены известные углы. Как вычислить остальные углы на этом рисунке?

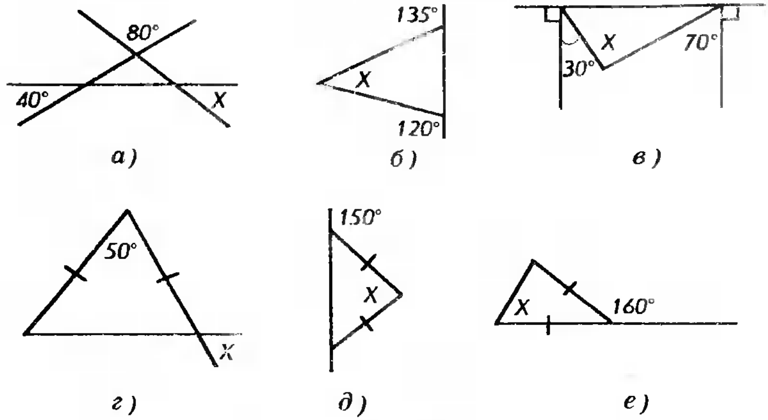


Рис. 278

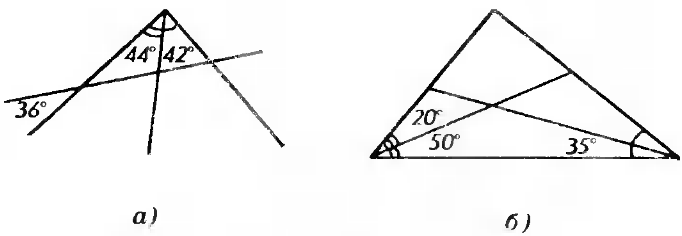


Рис. 279

Б

7.21. Пусть α, β, γ — величины углов треугольника. а) Запишите формулу, связывающую эти величины. б) Выразите из нее величину каждого из углов. в) Пусть угол β на 10° больше угла α. Запишите зависимость между углом γ и углом α; между углом γ и углом β. Как называется такая зависимость? г) Пусть угол γ в два раза больше угла β. Выразите угол α через угол β; угол β — через угол д) Пусть угол α в два раза меньше угла γ. Выразите угол β через угол γ; угол β — через угол α.

7.22. Пусть α — угол при основании равнобедренного треугольника, а β — угол при его вершине. а) Запишите формулу, связывающую эти величины. б) Выразите из этой формулы угол при вершине. Как называется такая зависимость? в) Выразите из нее угол при основании. Какая это зависимость?

г) Пусть угол при основании стал расти. Что будет происходить с углом при вершине? Сделайте рисунок, поясняющий ваш вывод. д) Пусть угол при вершине стал увеличиваться. Что будет происходить с углом при основании? Сделайте рисунок, поясняющий ваш вывод.

7.23. Составьте сами задачу по сюжетам задач 7.21 и 7.22.

7.24. Возьмите два чертежных равнобедренных треугольника, совместите их так, чтобы одна пара равных катетов совпала, а другая пара равных катетов лежала на одной прямой. Какой угол образуют между собой их гипотенузы? Теперь один из треугольников начните двигать вдоль прямой, на которой лежали совпавшие катеты. Какой угол будут составлять гипотенузы (точнее, их продолжения) теперь? Если вы разобрались с этим, верните треугольники в исходное положение. Начните теперь двигать один из них вдоль прямой, на которой лежали несовпавшие катеты. Какой угол будут составлять гипотенузы теперь?

В

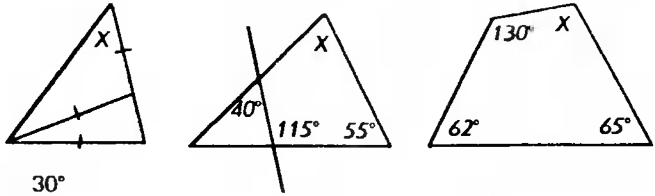
7.25. Вася находил углы в треугольнике и получил такие ответы: а) 60°, 80° и 36° 20′; б) 50° 10′, 60° 20′, 100° 20′ 20″; в) 70°, 80°, 33°; г) 61°, 72°, 83°; д) 33°, 66°, 71°. Можете ли вы, не находя суммы этих углов, доказать, что каждый из этих ответов — неверный.

7.26. Может ли в равнобедренном треугольнике быть: а) прямой угол; б) тупой угол?

7.27. Установите вид треугольника ABC, если: а) $\angle B = 2\angle A$, $\angle C = 3\angle A$; б) $\angle B = 2\angle C$, $\angle A = 6\angle C$; в) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$; г) $\angle A$ на 45° больше $\angle B$, а $\angle C$ на 45° больше $\angle A$.

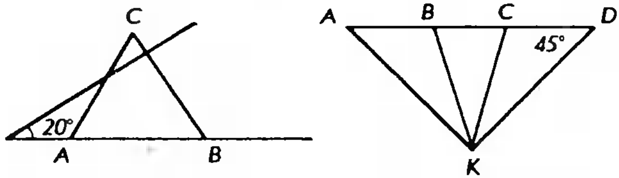
7.28. Вычислите углы равнобедренного треугольника, в котором: а) угол при вершине на 30° больше угла при основании; б) угол при вершине на 60° меньше угла при основании; в) угол при вершине в 2 раза больше угла при основании; г) угол при вершине в 4 раза меньше угла при основании.

7.29. Лучи a и b образуют угол с вершиной O. а) На луче a возьмите точку A, отличную от O. Пусть по лучу b от вершины O движется точка X. Докажите, что угол, под которым из нее виден отрезок OA, уменьшается. б) Пусть теперь по сторонам этого угла движутся концы отрезка, причем один конец движется к вершине, а другой — от нее. Как изменяются углы, которые отрезок образует со сторонами угла?



а) б) в)

Рис. 280



$AB = BC = AC$ $\qquad$ $AC = BD = AK = DK$

а) б)

Рис. 281

7.30. Два равнобедренных треугольника имеют общую боковую сторону, а две другие их боковые стороны служат продолжением друг друга. Какой фигурой является объединение этих треугольников?

7.31. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Чему равен внешний угол при его вершине? Как использовать этот результат для: а) деления угла пополам; б) удвоения угла?

7.32. Вычислите неизвестный угол на рис. 280.

7.33. Как вычислить неизвестные углы на рис. 281?

7.34. а) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 60°. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

б) Угол при основании равнобедренного треугольника равен 45°. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

в) Внешний угол равнобедренного треугольника равен φ. При каком значении φ этот треугольник является равносторонним? А прямоугольным?

7.35. Чему равен угол между биссектрисами двух углов треугольника, если третий его угол равен: а) 20°; б) 160°; в) φ? Как решить обратную задачу, т. е., зная угол между биссектрисами, найти угол в треугольнике?

7.36. Ясно, что в тупоугольном треугольнике есть два острых угла. а) Как вы это объясните? б) Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

7.37. Докажите, что наибольший угол треугольника не меньше 60°, а наименьший угол треугольника не больше 60°.

7.38. а) Нарисуйте остроугольный треугольник. Нарисуйте все его внешние углы. Их должно быть шесть. Сколько среди них тупых и сколько острых?

б) Ответьте на тот же вопрос для тупоугольного треугольника.

в) Какими будут внешние углы для прямоугольного треугольника?

г) Вам нужно определить вид треугольника (по углам), рассматривая только его внешние углы. Сколько углов вам придется просмотреть?

7.39. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30°. а) Вычислите внешний угол при основании треугольника. б) Какой угол образуют между собой биссектрисы внешних углов при разных вершинах основания? в) Какой угол образуют между собой биссектриса внешнего угла при основании и биссектриса внешнего угла при вершине? г) Решите эту задачу в общем виде.

7.40. Нарисуйте треугольник ABC. Внутри него отметьте точку X. Нарисуйте угол AXC. Сравните его (на глаз или с помощью транспортира) с углом ABC. Какое предположение вы можете сделать? Как его доказать?

7.41. На сторонах равностороннего треугольника постройте во внешнюю сторону три таких же треугольника. Какой фигурой является объединение всех четырех треугольников?

7.42. Посмотрите на рис. 282. Сколько углов здесь должно быть известно, чтобы вычислить все остальные?

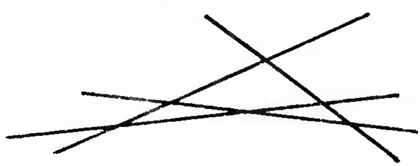


Рис. 282

7.43. а) Треугольник ABC — равносторонний. Некоторая прямая образует с прямой AB угол в 45°. Какие углы она составляет со сторонами AC и BC?

б) Решите эту задачу в общем виде.

в) Составьте и решите эту задачу для произвольного треугольника.

7.44. На медиане к основанию равнобедренного треугольника найдите такую точку, из которой основание видно под прямым углом. Придумайте сами похожую задачу.

7.45. Высота треугольника составляет со сторонами треугольника, проведенными из той же вершины, углы в $70°$ и $40°$. а) Какой угол она составляет с биссектрисой треугольника, выходящей из той же вершины? б) Составьте и решите задачу в общем случае.

7.46. В двух равных треугольниках ABC и ABD $AC = AD$ и $BC = BD$. Докажите, что высоты этих треугольников, проведенные к AB, лежат на одной прямой.

7.47. Каким по виду (по углам) является треугольник, если в нем есть два угла, которые в сумме дают: а) больше, чем третий угол; б) меньше, чем третий угол?

7.48. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная на его гипотенузу, равна ее половине.

7.49. Вычислите третий угол равнобедренного треугольника, в котором один из углов: а) $15°$; б) $80°$; в) $160°$.

7.50. Каким должен быть угол при основании равнобедренного треугольника, чтобы этот треугольник был: а) остроугольным; б) прямоугольным; в) тупоугольным?

Задачи к пункту 7.6

А

7.51. Как найти четвертый угол четырехугольника, если три его угла известны?

7.52. В четырехугольнике три угла прямые. Докажите, что четвертый угол тоже прямой.

7.53. Чему равны углы четырехугольника, если: а) все его углы равны; б) один из углов равен сумме всех остальных, равных между собой?

7.54. В четырехугольнике $ABCD$ известно следующее: а) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; б) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Докажите, что в нем найдутся пары углов, которые в сумме составят $180°$.

Б

7.55. Лист бумаги имеет форму прямоугольного треугольника. Его острый угол равен φ. Этот лист сгибается. При этом: а) совпадают части гипотенузы; б) совпадают части катета; в) вершина острого угла попадает в середину противоположного катета; г) вершина прямого угла попадает в середину гипотенузы. Чему равны углы полученного четырехугольника?

В

7.56. Из точки A, лежащей внутри данного угла, провели на его стороны перпендикуляры. Установите вид угла A в зависимости от вида данного угла.

7.57. Из некоторой точки треугольника проведены перпендикуляры на все его стороны. Известны два угла между ними. Сможете ли вы вычислить углы треугольника? Выберите сами числовые данные и получите результат. Составьте и решите обратную задачу.

7.58. Может ли в четырехугольнике быть такое: а) один из углов меньше суммы остальных; б) каждый из углов меньше суммы остальных; в) один из углов больше суммы остальных; г) каждый из углов больше суммы остальных?

7.59. Сколько острых углов может быть в четырехугольнике? А тупых?

7.60. а) Может ли в четырехугольнике один из углов равняться 359° ?

б) Могут ли углы четырехугольника иметь целое число градусов и отличаться последовательно на одно и то же число градусов?

7.61. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике наибольший угол (если он есть) — тупой, а наименьший — острый. Где в своем доказательстве вы использовали выпуклость четырехугольника?

7.62. Чему равен каждый угол равноугольного: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника; г) десятиугольника; д) n-угольника?

7.63. В каком n-угольнике все углы могут быть: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

7.64. Чему равна сумма всех углов пятиугольной звезды: а) равноугольной; б) любой?

7.65. Верно ли, что, составляя два многоугольника в один многоугольник, мы складываем сумму их углов в сумму углов составленного многоугольника?

7.66. Можно ли покрыть плоскость равноугольными: а) треугольниками; б) пятиугольниками; в) шестиугольниками; г) восьмиугольниками?

7.67. Можно ли покрыть плоскость равноугольными многоугольниками двух таких видов: а) шестиугольниками и треугольниками; б) четырехугольниками и восьмиугольниками; в) шестиугольниками и четырехугольниками?

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1. Два отрезка лежат на одной прямой. а) Пусть их длины равны 5 см и 6 см, а длина их пересечения равна 2 см. Вычислите длину их объединения. б) Пусть длины двух отрезков равны 5 см и 6 см, а длина их объединения равна 10 см. Вычислите длину их пересечения. в) Пусть первый отрезок имеет длину a, второй — длину b, длина их пересечения равна d, а объединения — c. Докажите, что $a + b = c + d$. г) Пусть длина одного из отрезков равна 4 см, длина их пересечения равна 2 см, длина их объединения равна 7 см. Вычислите длину второго отрезка. д) Пусть длины отрезков не меняются, а длина их пересечения стала увеличиваться. Что происходит с длиной их объединения? е) Пусть длины отрезков не меняются, а длина их объединения стала увеличиваться. Что происходит с длиной их пересечения? ж) Составьте по этому сюжету задачу самостоятельно.

2. Нарисуйте прямую, на ней — отрезок AB и точку D — середину AB. Вне AB на этой прямой находится точка C. а) Пусть $CA = 10$ см и $CB = 2$ см. Вычислите расстояние CD. б) Пусть $CA = a$, $CB = b$. Докажите, что $CD = \frac{1}{2}(a + b)$. в) Пусть известны расстояния CA и CD. Как вычислить CB? Приведите численный пример. г) Что происходит с величиной CD, если точка C удаляется от отрезка? д) А что происходит с точкой C, если расстояние CD начинает уменьшаться?

3. Нарисуйте прямую, на ней — отрезок AB и точку D — середину AB. Внутри этого отрезка взята точка C. а) Пусть $CA = 10$ см, $CB = 2$ см. Вычислите расстояние CD. б) Пусть $CA = a$, $CB = b$, причем $b > a$. Докажите, что $CD = \frac{1}{2}(b - a)$. в) Пусть известны расстояния CA и CD. Как вычислить CB?

Приведите численный пример. г) Что происходит с величиной CD, если точка C начинает двигаться к ближайшему к ней концу данного отрезка? д) А что будет происходить с этой величиной, если точка C будет двигаться к дальнему концу данного отрезка?

4. а) Отрезок AB разбит точкой C на два отрезка: $AC = 1$, $CB = 2$. Чему равно расстояние между серединами этих отрезков?

б) Решите такую же задачу в общем виде, когда $AC = a$, $CB = b$.

в) Сможете ли вы решить эту задачу, если известна только длина $AB = d$?

5. На прямой p лежат два отрезка длинами a и b, не имеющих общих точек. а) Сможете ли вы найти расстояние между их серединами? б) Пусть известно еще и расстояние c между ближайшими концами этих отрезков. Теперь сможете? в) А если вместо расстояния c будет известно расстояние d между наиболее удаленными концами этих отрезков, тогда сможете? г) Наконец, сможете ли вы найти расстояние между серединами данных отрезков, зная только c и d?

6. Федя нарисовал прямую, отметил на ней две точки A и B, затем точку C внутри отрезка AB и построил середины K и L отрезков AC и CB. Пришел Вася и стал стирать отмеченные точки. Сможет ли Федя восстановить рисунок, если будут стерты: а) точка C: б) точка B; в) точки A и B; г) точки C и B; д) точки A, B, C?

7. Три отрезка длиной 6 см каждый лежат на одной прямой. Первый и второй имеют общую часть, равную 4 см. Такую же общую часть имеют второй и третий отрезки. Можете ли вы вычислить длину общей части первого и третьего отрезков? Попытайтесь решить такую же задачу в общем случае.

8. Углы α и δ имеют общую вершину, угол β — их объединение, угол γ — пересечение. а) Пусть $\alpha = 50°$, $\delta = 60°$, $\gamma = 20°$. Вычислите β. б) Пусть $\alpha = 50°$, $\delta = 60°$, $\beta = 70°$. Вычислите угол γ. д) Пусть величины углов α и δ одни и те же, а величина угла γ увеличивается. Что происходит с величиной угла β? е) Пусть величины углов α и δ не меняются, а угол β увеличивается. Что происходит с углом γ? ж) Составьте самостоятельно задачу по этому сюжету.

9. Дан угол ab, луч d — его биссектриса, а луч c идет вне угла ab из его вершины. а) Пусть $\angle ca = 100°$, $\angle cb = 20°$. Вычислите величину угла cd. б) Пусть $\angle ca = \alpha$, $\angle cb = \beta$.

Докажите, что $cd = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. в) Пусть $\angle\, ca = 30°$, $\angle\, cd = 50°$. Вычислите величину угла cb. г) Пусть луч c повернулся вокруг вершины угла ab на некоторый угол φ. Как изменился угол cd?

10. Дан угол ab, луч d — биссектриса угла ab, луч c идет из вершины угла ab внутри него. а) Пусть $\angle\, ca = 100°$, $\angle\, cb = 20°$. Вычислите величину угла cd. б) Пусть $\angle\, ca = \alpha$, $\angle\, cb = \beta$, причем $\beta > \alpha$. Докажите, что $\angle\, cd = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. в) Пусть $\angle\, ca = 30°$, $\angle\, cd = 10°$. Можете ли вы вычислить величину угла cb?

Наверное, вы заметили, что задачи 8, 9 и 10 про углы аналогичны (похожи) соответственно задачам 1, 2 и 3 про отрезки. Эту аналогию вы можете продолжить сами. Составьте задачи про углы, аналогичные задачам 4, 5, 6 и 7 про отрезки. Решить эти задачи вы сможете тоже аналогично решениям соответствующих задач про отрезки. Вот почему полезно подмечать аналогии — не надо выдумывать новых способов решения.

11. а) С помощью транспортира постройте угол в 70°. Уберите транспортир и постройте угол в 10°.

б) С помощью транспортира постройте угол в 17°. Уберите транспортир и постройте угол в 7°.

в) С помощью транспортира постройте угол в 65°. Уберите транспортир и постройте угол в 20°. (Убрав транспортир, вы можете пользоваться другими инструментами.)

12. Даны две точки A и B такие, что $AB = 1$. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех точек X таких, что: а) $AX \le 1$, $BX \le 1$; б) $AX \le 1$, $BX \ge 1$; в) $AX \ge 1$, $BX \le 1$; г) $AX \ge 1$, $BX \ge 1$.

13. Даны две точки A и B. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех точек X таких, что: а) $\angle\, XAB \le 30°$, $\angle\, XBA \le 30°$; б) $\angle\, XAB \ge 30°$, $\angle\, XBA \le 30°$; в) $\angle\, XAB \le 30°$, $\angle\, XBA \ge 30°$; г) $\angle\, XAB \ge 30°$, $\angle\, XBA \ge 30°$.

14. Точка O — середина отрезка AB, $OA = 1$. Нарисуйте фигуру, состоящую из всех точек X таких, что: а) $\angle\, XOA = 30°$, $XO \le 1$; б) $\angle\, XOA = 30°$, $XO \ge 1$; в) $\angle\, XOA = 30°$, $XO = 1$. Составьте сами аналогичные задачи, взяв $\angle XOA \ge 30°$, а затем не меньше 30°.

15. а) Стрелки будильника показывают 12 ч 15 мин. Стрелка звонка будильника расположена так, что все три стрелки образуют смежные углы. В какое время зазвонит будильник?

б) Стрелки часов будильника и стрелка его звонка расположены так, что одна из стрелок идет по биссектрисе угла, образованного двумя другими стрелками. Сколько времени показывает будильник и когда прозвенит звонок?

в) Составьте сами задачу про будильник.

16. Участник соревнований по ориентированию на местности со старта пробежал 180 м по азимуту 40°, затем 100 м по азимуту 100°, потом 300 м по азимуту 240°, затем 150 м по азимуту 0°. Теперь ему надо попасть на финиш, который совпадает со стартом. По какому азимуту он должен двигаться и какое расстояние ему предстоит преодолеть? (Азимут — это угол между направлением движения и направлением на север.)

17. Один любознательный муравей заинтересовался геометрией. Он прополз прямо 10 см, потом повернул направо под углом 90° и опять прополз 10 см, потом повернул направо под углом 90° и опять прополз 10 см. Когда муравей вновь повернул направо под углом 90° и снова прополз 10 см, то оказался, разумеется, там же, где был в самом начале. В следующий раз он решил, проползая одинаковые расстояния в каждом направлении своего движения, поворачивать каждый раз направо под углом 120°. И опять оказался в начальной точке. Тогда муравей решил попробовать другие углы поворота: 30°, 60°, 150°. И опять попадал на прежнее место.

Во-первых, проверьте, действительно ли муравей попадал в исходную точку или ему так только показалось. Во-вторых, попытайтесь найти другие такие же удивительные углы поворота. В-третьих, попытайтесь обнаружить все такие углы, для чего полезно поразмышлять и установить зависимость между величиной угла поворота и числом таких поворотов. Очень важно при этом понять с точки зрения измерения углов, что значит «вернуться на прежнее место».

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

1. Придумайте сами какой-нибудь признак равенства треугольников: а) прямоугольных; б) произвольных. Попытайтесь его доказать.

2. Докажите, что в равных треугольниках равны соответственные: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

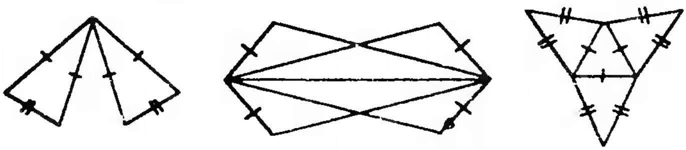
3. Нарисуйте два равных треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отметьте точки D и D_1 такие, что $AD = A_1D_1$. Проведите отрезки BD и B_1D_1. Найдите на рисунке равные треугольники. Опираясь на эту задачу, предложите способ разрезания двух равных треугольников на любое число соответственно равных треугольников.

4. 1) Докажите, что равнобедренные треугольники равны по таким элементам: а) боковой стороне и основанию; б) боковой стороне и углу при вершине; в) основанию и углу при нем; г) основанию и высоте к нему; д) высоте на основание и углу при вершине.

2) Найдите сами какой-нибудь признак равенства равнобедренных треугольников.

3) Найдите сами какой-либо признак равенства равносторонних треугольников.

5. Равенство каких расстояний и углов можно доказать для фигур, изображенных на рис. 283.



а) *б)* *в)*

Рис. 283

6. Нарисуйте точки A и B, а также точку O, не лежащую на прямой AB. Нарисуйте точки A_1 и B_1 на прямых OA и OB так, что точка O — середина отрезков AA_1 и BB_1. Проведите отрезки AB и A_1B_1. Проведите любую прямую, проходящую через O и пересекающую отрезки AB и A_1B_1 в точках C и C_1. а) Докажите, что точка O — середина отрезка CC_1. б) Докажите, что прямая CC_1 разбивает отрезки AB и A_1B_1 на соответственно равные отрезки.

7. Два отрезка AA_1 и BB_1 пересекаются и в точке пересечения O делятся пополам. Проведите отрезки AB и A_1B_1. а) Отметьте точку C на AB и проведите прямую CO. Отложите на ней отрезок $OC_1 = OC$. Докажите, что точка C_1 лежит на отрезке A_1B_1. б) Решите аналогичную задачу, если точка C будет находиться на прямой AB.

8. Нарисуйте прямую a. а) Отметьте точку A на прямой a и точку B вне прямой a. Нарисуйте отрезок AB и перпендикуляр BK на прямую a и продолжите его на отрезок $KB_1 = BK$. Нарисуйте затем отрезок AB_1. Отметьте точку X на AB. Постройте точку X_1 аналогично тому, как строили точку B_1. Теперь докажите, что X_1 лежит на AB_1. б) Выполните аналогичное задание для случая, когда точки A и B лежат с одной стороны от прямой a; с разных сторон от прямой a.

9. Нарисуйте прямую и точку A вне ее. Проведите перпендикуляр AB на эту прямую. Пусть из точки K этой прямой отрезок AB виден под углом $30°$, а из точки L этой прямой он виден под углом $45°$. Под каким углом виден из точки A отрезок KL? Получив ответ, решите задачу в общем случае, когда данные углы равны φ_1 и φ_2.

10. Установите вид треугольника (по углам), если в нем: а) сумма двух углов равна третьему; б) сумма двух любых углов больше третьего; в) есть два угла, которые в сумме дают меньше, чем третий угол; г) два любых угла дают в сумме меньше, чем третий угол.

11. 1) Каков по виду треугольник, если: а) он является объединением двух равнобедренных треугольников, пересечением которых служит их общая боковая сторона; б) его медиана оказалась равна половине той стороны, которую она разделила пополам.

2) Как выглядит задача, обратная задаче б)?

12. Дан отрезок. Какую фигуру образуют все точки, из которых он виден под прямым углом?

13. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ основание — квадрат $ABCD$. Все ребра пирамиды равны. Какими по виду являются треугольники: а) PCD; б) PQC; в) APC; г) BPD. (Точка Q — точка пересечения диагоналей квадрата.)

14. В треугольной пирамиде $PABC$ грани PCA и PCB — прямоугольные треугольники, имеющие общий катет PC, а грань ABC — равнобедренный треугольник, в котором $CA = CB$. (Такую пирамиду легко себе представить, если совместить два равных чертежных треугольника.) Кроме того, $PC = AB$. Какое ребро в такой пирамиде наибольшее?

15. Попытайтесь сделать такую пирамиду, у которой все грани — прямоугольные треугольники. Если это удалось, то укажите в ней наибольшее ребро.

16. Могут ли все грани треугольной пирамиды быть тупоугольными треугольниками?

17. Через вершину C треугольника ABC проводится прямая, проходящая через биссектрису его внешнего угла. По этой прямой движется точка X. При каком ее положении сумма $XA + XB$ является наименьшей?

18. Вы идете по шоссе мимо башни. Чем ближе вы к башне, тем лучше ее видно. Как вы это объясните?

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛР № 070869 от 16.02.93.

Н/К

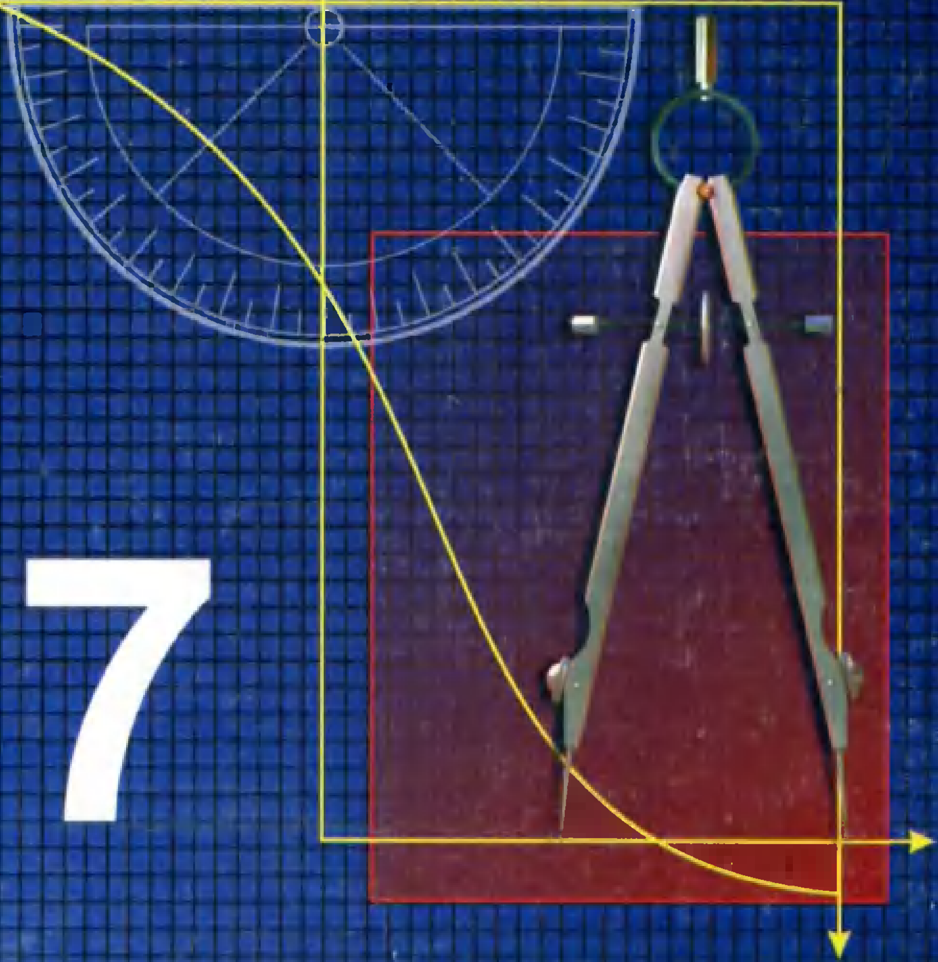
Изд. № Ф30(03). Подписано в печать 17.05.94.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Объем 12,5 печ.л. Тираж 30 000 экз.
Заказ 137 Цена договорная

Московский институт развития образовательных систем
109004 Москва, Нижняя Радищевская ул., д. 10

АО „Чертановская типография"
113545, Москва, Варшавское шоссе, 129а

А.Д. Александров
А.Л. Вернер
В.И. Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ



7

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ,

А. Л. ВЕРНЕР, В. И. РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7 класса средних школ

Рекомендовано к изданию Комитетом по образованию Санкт-Петербурга

Санкт-Петербург
«Специальная Литература»
1998

УДК 373
51
Г 35

Александров А. Д. и др.

Г 35 **Геометрия:** Учебник для учащихся 7 класса средних школ.— СПб: «Специальная Литература», 1998.— 238 с.

ISBN 5-86457-030-3

Учебник обеспечивает дифференцированное преподавание геометрии: последовательно-параллельное изложение материала ведется на трех уровнях — наглядном, прикладном и логическом. Пособие развивает традиции, которые сложились в серии учебных книг по геометрии авторского коллектива, возглавляемого академиком А. Д. Александровым. Не назидание, а беседа — таков авторский стиль данного курса. Большой набор задач по всем темам курса (фактически — задачник в учебнике) поможет учителю организовать практическую работу с учащимися.

ISBN 5-86457-030-3

Предисловие

В 1994 году МИРОС издал наш учебник «Геометрия 7» вместе с пособием для учителя «Строгий мир геометрии». К сожалению, «Геометрия 8» появилась лишь в 1997 году. Задержка с ее изданием произошла не по вине авторов. Мы решили переиздать «Геометрию 7» и «Строгий мир геометрии», чтобы они вместе с учебниками «Геометрия 8» и «Геометрия 9» и пособиями к ним — «От Пифагора до Евклида» и «От Евклида до Лобачевского» — составили полный комплект учебных пособий для дифференцированного изучения геометрии.

Учебники рассчитаны на три уровня: *гуманитарный* (общеобразовательный), расширяющий его *прикладной* и *логический* (*проблемный*), углубляющий первый уровень освоения геометрических знаний. Такая же дифференциация проведена и в задачниках, составленных В. И. Рыжиком.

Экспериментальная проверка учебников проведена в школах Санкт-Петербурга учителями Л. П. Евстафьевой, А. А. Окуневым и О. А. Шептовицкой. Их предложения и замечания учтены авторами. Например, в учебнике часть материала под заголовками «Вопросы, вопросы, вопросы...» и «Размышления...» предложена А. А. Окуневым, а часть им и написана. Автором комментариев является Т. Г. Ходот.

Опыт работы по учебнику «Геометрия 7», изданному в 1994 году, показал, что в него следует включить материал о параллельности, что и сделано в этом издании. Теперь после работы по этому учебнику в 7-ом классе легко можно перейти (при желании) к работе по другим учебникам геометрии как нашего авторского коллектива, так и других авторов. Специально отметим, что настоящий учебник служит хорошей основой для работы в дальнейшем по нашему учебнику «Геометрия 8—9» для углубленного изучения геометрии, изданному «Просвещением».

Авторы

Глава 3

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

Слово «параллельный» в переводе с греческого означает «идущий рядом». Параллельны, например, две противоположные стороны прямоугольника или рельсы, идущие рядом (рис. 213).

В геометрии говорят о параллельных отрезках, прямых, плоскостях и т. п. несколько иначе. Уже Евклид в «Началах», определяя параллельные прямые, говорит так: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются».

Это определение Евклида можно отнести и к параллельным отрезкам и к параллельным прямым. Теперь же говорят короче: **параллельными** называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 214). А параллельные отрезки — это отрезки, лежащие на параллельных прямых.

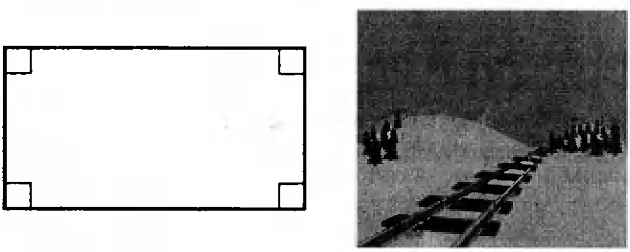
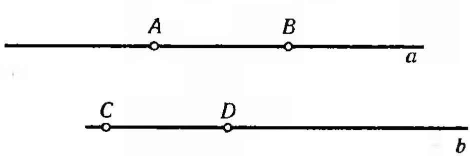


Рис. 213



$a \parallel b$; $AB \parallel CD$

Рис. 214

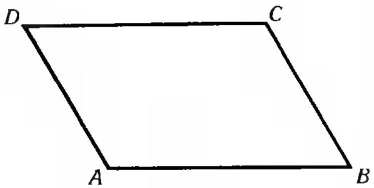


Рис. 215

Параллельность прямых и отрезков обозначают значком $\parallel$: например, $a \parallel b$, $AB \parallel CD$ и т. д.

О параллельности говорится и в таких геометрических терминах, как параллелограмм и параллелепипед.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого две пары параллельных сторон (рис. 215). Параллелограмм — плоская фигура. Аналогичная ей пространственная фигура — это знакомый вам **параллелепипед** (рис. 216). С первых классов вам известен прямоугольный параллелепипед, грани которого — прямоугольники (рис. 217). У произвольного параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы (рис. 216).

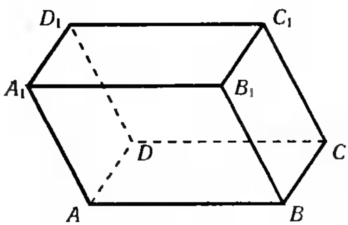


Рис. 216

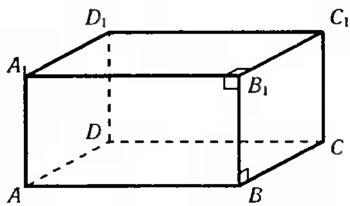


Рис. 217

В параллелепипеде противоположные грани параллельны друг другу (как параллельны противоположные стороны параллелограмма). Это значит, что плоскости, в которых лежат противоположные грани параллелепипеда, не имеют общих точек.

Все предложения, доказанные в этой главе, являются либо признаками параллельности (в § 8), либо свойствами параллельности (в § 9). Слово «теорема» мы для них не применяем, а потому в конце доказательства вместо слов «теорема доказана» ставится значок ■. В последнем параграфе этой главы — в § 10 — рассказывается о параллельности в пространстве и сравнивается параллельность на плоскости с параллельностью в пространстве.

§ 8. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

8.1. Признаки параллельности прямых. Параллельность двух прямых (или отрезков) распознают по углам, которые эти прямые (или отрезки) образуют с третьей прямой, пересекающей их (или с отрез-

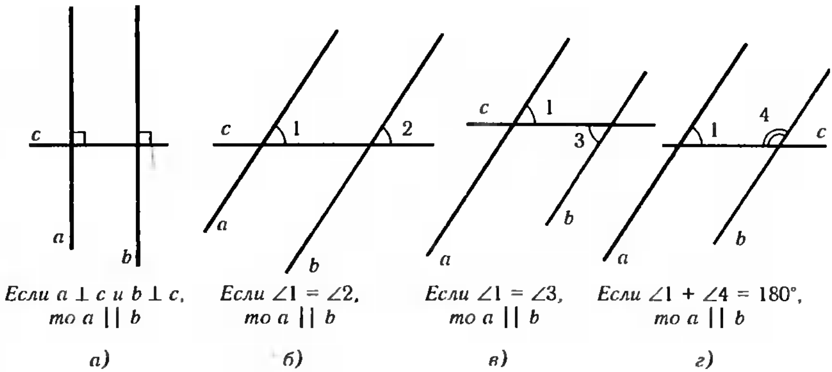


Рис. 218

ком, соединяющим их точки). Эти многочисленные признаки изображены на рис. 218.

Все эти признаки легко доказываются методом «от противного». Допустив, что прямые a и b непараллельны, мы каждый раз приходим к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника (п. 6.2) или с одним из ее следствий (рис. 219).

На рис. 219 мы допускаем, что прямые a и b пересекаются выше прямой c. Если же допустить, что они пересекаются ниже прямой c, то снова придем к противоречию. Сделайте это самостоятельно.

А теперь попробуем сформулировать уже доказанные нами признаки параллельности. Первый из них формулируется очень просто: **две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны** (речь идет, конечно, о прямых, лежащих в одной плоскости). А вот чтобы кратко сформулировать остальные, необходимо ввести специальные названия для углов, участвующих в этих признаках. Сделаем это.

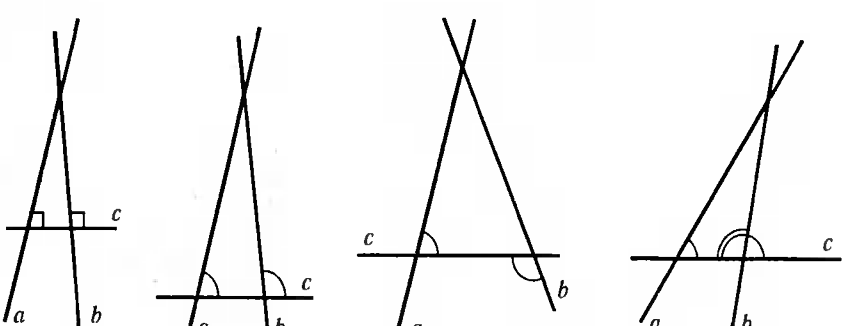


Рис. 219

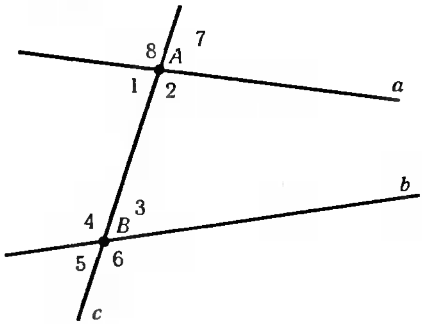


Рис. 220

Итак, пусть прямая c пересекает две прямые a и b в точках A и B (рис. 220). Тогда они образуют восемь углов с вершинами в точках A и B.

Углы, прилегающие к отрезку AB, называются **внутренними**. Те из них, которые лежат с одной стороны от AB, называются **односторонними**, а те, что лежат с разных сторон и имеют различные вершины,— **накрест лежащими**. Так что углы 1 и 3 — внутренние накрест лежащие, а углы 1 и 4 — внутренние односторонние.

Кроме внутренних односторонних или накрест лежащих говорят еще и о внешних односторонних или накрест лежащих углах. На рис. 220 углы 6 и 7 — внешние односторонние, а углы 5 и 7 — внешние накрест лежащие.

Наконец, пары углов 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**.

Теперь признаки параллельности, соответствующие рис. 218 формулируются кратко:

Первый признак параллельности: **если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то прямые параллельны**.

Второй признак параллельности: **если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны**.

Третий признак параллельности: **если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны**.

Но мы в этих признаках использовали не все пары углов. Поищите еще признаки самостоятельно, сформулируйте и докажите их.

В заключение отметим, что утверждение о том, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны, является частным случаем любого другого признака параллельности. Объясните это.

8.2. Трапеция и параллелограмм. Признаки параллелограмма. Если у четырехугольника имеется лишь одна пара параллельных сторон, то такой четырехугольник называется **трапецией** (рис. 221, *а*). Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми** сторонами. Если боковые стороны трапеции равны, то трапеция называется **равнобедренной** (рис. 221, *б*).

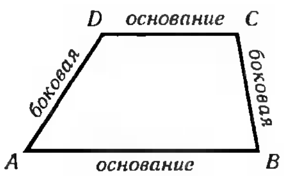
Узнать, будет ли четырехугольник трапецией, можно, используя признаки параллельности прямых.

В том случае, когда четырехугольник имеет две пары параллельных сторон, то он, как вы уже знаете, называется **параллелограммом** (рис. 215). Другими словами, **параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны**.

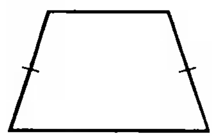
Признаки параллелограмма формулируются не только через равенство углов (как уже полученные признаки параллельности), но и через равенство отрезков. Сформулируем три основных из них.

Первый признак: **четырехугольник, противоположные стороны которого равны,— параллелограмм** (рис. 222, *а*).

Второй признак: **четырехугольник, противоположные углы которого равны,— параллелограмм** (рис. 222, *б*).

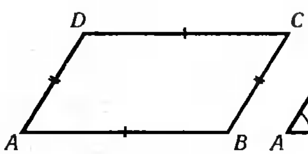


а)



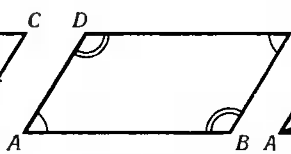
б)

Рис. 221



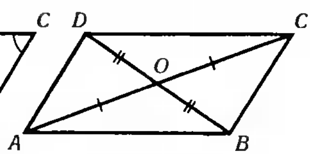
Если $AB = CD$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм

а)



Если $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$, то $ABCD$ — параллелограмм

б)



Если $OA = OC$ и $OB = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм

в)

Рис. 222

Третий признак: **четырехугольник, диагонали которого, пересекаясь, делятся пополам,— параллелограмм** (рис. 222, *в*).

Попробуйте доказать эти признаки самостоятельно.

8.3. Доказательства признаков параллелограмма. Проще всего доказывается второй признак. Сумма всех углов любого четырехугольника равна 360°. Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Так как $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$, то $\angle A + \angle B = 180°$. А тогда по третьему признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Аналогично, $\angle A + \angle D = 180°$. Поэтому $AB \parallel DC$. Итак, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Чтобы доказать третий признак параллелограмма, достаточно увидеть на рис. 223 две пары равных треугольников: $\triangle ABO = \triangle CDO$ и $\triangle BCO = \triangle DAO$ (по первому признаку равенства треугольников). Из равенства треугольников ABO и CDO вытекает равенство углов 1 и 2 (рис. 223). Это накрест лежащие углы при прямых AB и CD, пересеченных прямой AC. По второму признаку параллельности прямых $AB \parallel CD$. Аналогично, из равенства углов 3 и 4 следует, что $BC \parallel AD$. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Чтобы доказать первый признак, выполним дополнительное построение — проведем диагональ AC (рис. 224). Тогда $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по трем сторонам). Поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $AB \parallel CD$. Кроме того, $\angle 3 = \angle 4$, а потому $AD \parallel BC$. ■

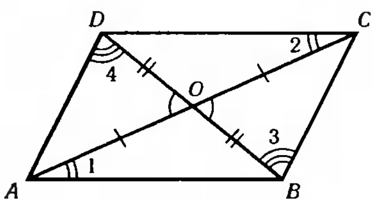


Рис. 223

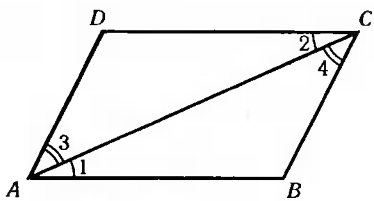


Рис. 224

8.4. Построение параллельных отрезков и прямых. В практике, используя признаки параллельности, строят различные фигуры, содержащие параллельные отрезки (например, параллелограммы, прямоугольники, трапеции). В теории же чаще всего встречается такая задача.

Задача. Через точку M, не лежащую на данной прямой a, провести прямую, параллельную прямой a.

Решение. Можно предложить несколько вариантов решения этой задачи. Самое простое решение такое. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую a (рис. 225, *а*). Через точку M проведем прямую $b \perp MP$. Так как прямые a и b перпендикулярны отрезку MP, то они параллельны (рис. 225, *б*).

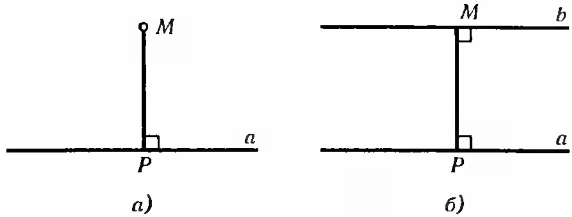


Рис. 225

Решение этой задачи позволяет поставить очень важный вопрос: а сколько прямых, параллельных прямой a, проходит через точку M? Такая прямая лишь одна — это построенная вами прямая b! Мы докажем это утверждение в следующем параграфе.

8.5. Признак и построение прямоугольника. Из всех параллелограммов чаще всего (и в теории, и в практике) встречаются прямоугольники. Поэтому мы выделим особо следующий признак прямоугольника: **четырехугольник, в котором три угла прямые — прямоугольник**, т. е. четвертый его угол тоже прямой, и его противоположные стороны равны.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ углы A, B, C — прямые, т. е. $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$ (рис. 226). Так как сумма всех углов любого четырехугольника равна 360°, то $\angle D = 90^\circ$. Итак, $\angle D$ — прямой.

Покажем, что $AB = DC$ и $AD = BC$. Допустим, что $AB \neq DC$. Тогда отложим на луче DC отрезок $DM = AB$ (рис. 227) и проведем отрезок BM. Получим прямоугольник $ABMD$ (по аксиоме прямоугольника п. 6.4). Из точки B на прямую CD опущены два перпендикуляра — BC и BM, что невозможно (следствие 4 п. 6.2).

Итак, допущение, что $AB \neq DC$ ведет к противоречию. Поэтому $AB = DC$. Аналогично доказывается, что $AD = BC$. ■

Доказанный нами признак мы часто будем использовать при таких построениях прямоугольника.

Первое построение. Внутри прямого угла с вершиной A возьмем точку C и опустим перпендикуляры CB и CD на стороны этого угла (рис. 228). Тогда четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

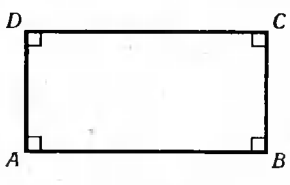


Рис. 226

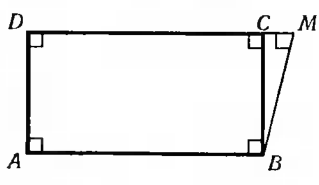


Рис. 227

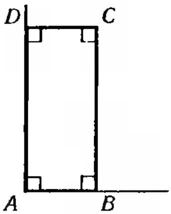


Рис. 228

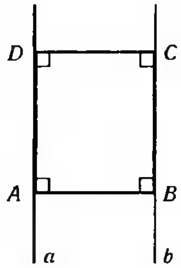


Рис. 229

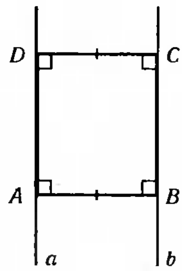


Рис. 230

Второе построение. В одной плоскости через концы отрезка AB проведены две прямые a и b, перпендикулярные этому отрезку (рис. 229). Возьмем на прямой b любую точку C и опустим перпендикуляр CD на прямую a. Получим прямоугольник $ABCD$. Отметим, в частности, что $CD = BA$, т. е. параллельные прямые a и b идут на постоянном расстоянии друг от друга (рис. 230).

Признаком прямоугольника является и такое утверждение: *четырехугольник, все углы которого равны,— прямоугольник.*

Объясните, почему справедливо это утверждение.

8.6. Ромб и квадрат. Среди всех четырехугольников прямоугольник выделяется тем, что все его углы равны. **Ромбом** называется четырехугольник, все стороны которого равны (рис. 231). А четырехугольник, у которого равны и все стороны, и все углы,— это хорошо знакомый вам квадрат (рис. 232). Ромб, конечно, является параллелограммом (по первому признаку п. 8.3).

Легко убедиться, что *диагонали ромба являются биссектрисами его углов и они взаимно перпендикулярны.*

Действительно, пусть диагонали $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 233). Тогда равнобедренные треугольники ABC и ADC равны.

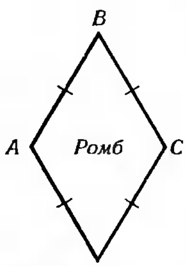


Рис. 231

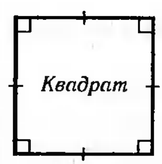


Рис. 232

Поэтому $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = \angle DCA$.

Следовательно, AC является биссектрисой углов A и C ромба $ABCD$.

Аналогично, диагональ BD является биссектрисой углов B и D.

Далее $\triangle ABO = \triangle BCO = \triangle CDO = \triangle DAO$ (по стороне и двум углам). Поэтому $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90°$. Итак, диагонали ромба AC и BD взаимно перпендикулярны. ■

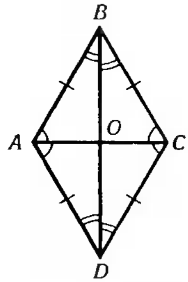


Рис. 233

Утверждения, обратные установленным двум свойствам диагоналей ромба, являются признаками ромба. Здесь мы докажем первое из них. *Параллелограмм, диагональ которого является биссектрисой его углов, является ромбом.*

Действительно, если диагональ AC параллелограмма $ABCD$ является биссектрисой углов A и C, то в равных треугольниках ABC и ADC все углы при стороне AC равны. Поэтому эти треугольники — равнобедренные, т. е. $AB = BC = AD = DC$. Итак, $ABCD$ — ромб. ■

Комментарий

Слово «ромб» происходит от греческого rhombos, означающего «бубен». Оказывается, в древние времена бубны — музыкальные инструменты — были не круглыми, как сейчас, а имели форму ромба.

Слово «квадрат» происходит от латинского quadratus — «четырехугольный». Однокоренными являются:

кварта — интервал в музыке, содержащий четыре тона;

квартет — музыкальное произведение для четырех голосов или инструментов, а также ансамбль из четырех музыкантов;

квартал — часть города, ограниченная улицами;

квартира — часть дома.

Попробуйте подобрать однокоренные слова. В этом вам помогут различные словари, в том числе этимологический.

Слово «трапеция», как уже говорилось во введении, происходит от греческого, означающего «столик». Оно сохранилось в русском языке в форме «трапеза» — обед, пища.

§ 9. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

9.1. Единственность прямой, параллельной данной. В § 8 мы получили несколько признаков параллельности. С их помощью вы теперь можете строить параллельные отрезки, параллелограммы, трапеции. В этом параграфе мы продолжим изучение параллельности и найдем ряд свойств фигур, у которых есть параллельные отрезки. Все эти

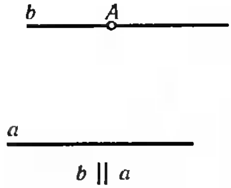


Рис. 234

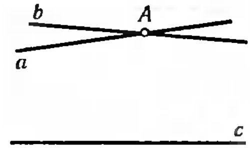


Рис. 235

свойства основаны на важнейшем утверждении о параллельных прямых. Вот оно.

Утверждение о единственности параллельной. *Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит лишь одна прямая, параллельная данной* (рис. 234).

Это утверждение мы докажем в следующем пункте. А сейчас сделаем два простейших вывода из него.

1. *Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.* (Это еще один п р и з н а к   п а р а л л е л ь н о с т и.)

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что a и b параллельны, способом «от противного».

Допустим, что a и b пересекаются в точке A (рис. 235). Тогда через A проходят две прямые, параллельные прямой c. А это противоречит утверждению о единственности параллельной. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. $a \parallel b$.

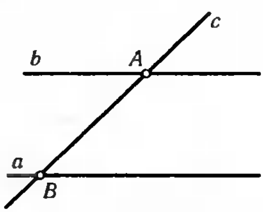


Рис. 236

2. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них* (рис. 236).

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке A. Если допустить, что прямая c не пересекает прямую b, то получится, что через точку A проходят две прямые a и c, параллельные прямой b. А это невозможно. Поэтому прямая c пересекает прямую b в точке B. ■

9.2. Доказательство утверждения о единственности параллельной. Итак, рассмотрим произвольную прямую a и любую точку A, не лежащую на прямой a. Прямую a считаем горизонтальной, а точку A, лежащей выше a (рис. 237). Опустим перпендикуляр AB на прямую a и проведем через точку A прямую b, перпендикулярную AB. Как нам уже известно, прямая b параллельна прямой a. Возьмем любую прямую c, проходящую через точку A, и покажем, что прямая c пересекает прямую a.

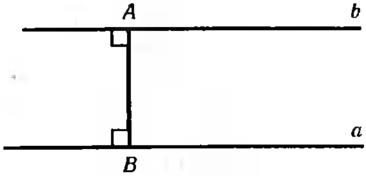


Рис. 237

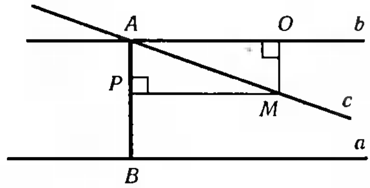


Рис. 238

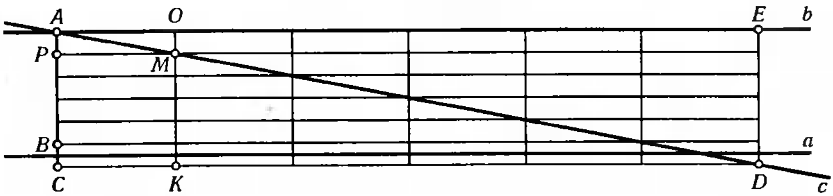
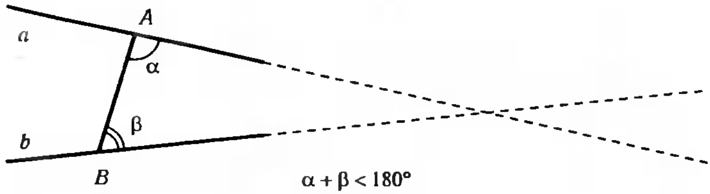


Рис. 239

Возьмем на прямой c какую-нибудь точку M в полосе между прямыми a и b и опустим перпендикуляр MP на AB и MO на b (рис. 238). Получим прямоугольник $AOMP$. Приложим последовательно друг к другу прямоугольники, равные прямоугольнику $AOMP$, так, чтобы их стороны, лежащие на луче AB, покрыли отрезок AB. Число n таких прямоугольников должно быть больше, чем $\frac{|AB|}{|AP|}$. Объединение этих прямоугольников составит прямоугольник $AOKC$, две вершины которого C и K лежат ниже прямой a. Теперь приложим последовательно друг к другу n прямоугольников, равных прямоугольнику $AOKC$, как указано на рис. 239. Получим прямоугольник $ACDE$, состоящий из n^2 прямоугольников, равных прямоугольнику $AOMP$. Его вершины C и D лежат ниже прямой a, а диагональ AD лежит на луче AM прямой c. Так как точки A и D лежат по разные стороны от прямой a, то прямая c пересекает прямую a. Итак, любая прямая c, проходящая через точку A и отличная от прямой b, пересекает прямую a. Следовательно, через точку A проходит лишь одна прямая b, параллельная прямой a. ■

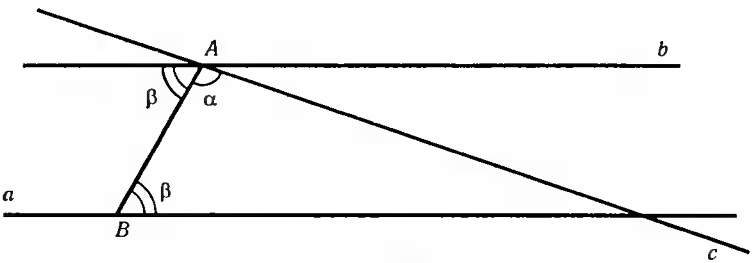
9.3. Пятый постулат Евклида и равносильные ему утверждения. Мы доказали утверждение о единственности параллельной, опираясь на аксиому прямоугольника, согласно которой можно построить прямоугольник с любыми заданными сторонами. Евклид в «Началах» это утверждение доказывал, опираясь на пятый постулат, который гласит следующее:

«И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две



$\alpha + \beta < 180°$

Рис. 240



$\alpha + \beta < 180°$

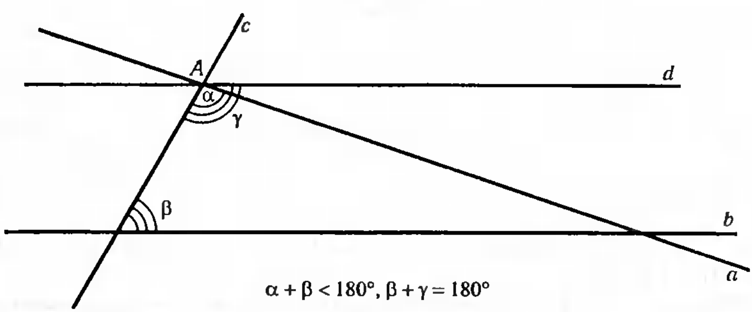
Рис. 241

прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» (рис. 240).

Из пятого постулата Евклида легко вытекает утверждение о единственности параллельной. Проведите самостоятельно это доказательство, глядя на рис. 241.

Верно и обратное. Если принять за аксиому утверждение о единственности параллельной, то, опираясь на него, можно вывести пятый постулат.

Действительно, допустим, что прямые a и b образуют с прямой c внутренние односторонние углы α и β, в сумме меньшие двух прямых углов, т. е. меньшие 180° (рис. 242). Тогда через точку A проходит



$\alpha + \beta < 180°, \beta + \gamma = 180°$

Рис. 242

прямая d, отличная от прямой a и образующая с прямой c такой угол γ, который в сумме с углом β равен 180°. Тогда согласно третьему признаку параллельности прямые b и d параллельны. Но тогда, в силу утверждения о единственности параллельной, прямые a и b параллельными быть не могут, т. е. они пересекаются. Ясно, что пересечься они могут лишь с той стороны, где расположены углы α и β.

Итак, пятый постулат выполняется, если верно утверждение о единственности параллельной. ■

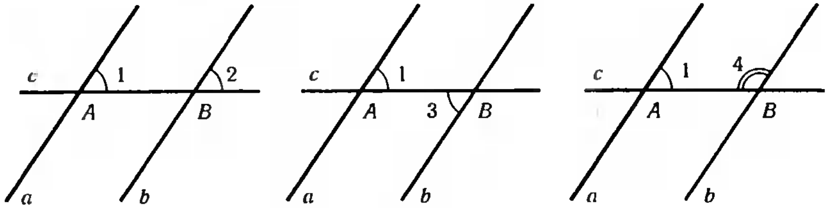
О любых двух утверждениях, каждое из которых может быть выведено из другого, говорят, что они **равносильны**. Проводя рассуждения, доказательства, всегда можно заменить утверждение равносильным ему, если это удобно. Мы с вами установили, что пятый постулат Евклида и утверждение о единственности параллельной равносильны. Сейчас чаще всего именно это утверждение принимают за аксиому при систематическом построении геометрии и называют его аксиомой параллельности Евклида, хотя у Евклида такой аксиомы нет, а есть равносильный ей пятый постулат. Мы же вместо пятого постулата выбрали равносильную ему аксиому прямоугольника: она не только позволяет просто получить основные теоремы планиметрии (например, теорему о сумме углов треугольника), но и постоянно подтверждается практикой изготовления реальных прямоугольников.

Замена при рассуждении утверждения равносильным ему утверждением — один из наиболее распространенных и удобных приемов в математике (не только в геометрии, но и в алгебре, например, при решении уравнений). Часто не говорят о том, что утверждения равносильны, а применяют выражение «...тогда и только тогда...». Например, точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка. Соединяют равносильные утверждения также символом $\Leftrightarrow$.

Комментарий

Словом «постулат» в науке называют такое утверждение, которое принимается без доказательства и которое служит основой для получения дальнейших выводов этой науки (например, геометрии, физики и т. п.). Слово «постулат» происходит от латинского и означает «класть», «ставить». Поэтому, например, однокоренное слово «пост» — это и место, где поставлена стража, и сама стража. Однокоренным является также слово «постамент» — подножие, пьедестал. Евклид в «Началах» часть исходных положений называл «постулатами», а другую часть — аксиомами.

9.4. Свойства параллельных прямых, пересеченных третьей прямой. Все теоремы о свойствах параллельности, которые мы далее докажем, являются утверждениями, обратными к признакам параллельности. Вспомните эти признаки и сформулируйте обратные им



Если a || b,
то $\angle 1 = \angle 2$

а)

Если a || b,
то $\angle 1 = \angle 3$

б)

Если a || b,
то $\angle 1 + \angle 4 = 180°$

в)

Рис. 243

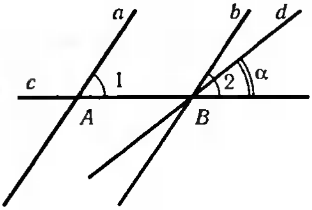


Рис. 244

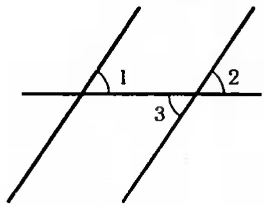


Рис. 245

утверждения. Проще всего это сделать так: посмотреть на рис. 218 и подписи к нему и поменять местами условие и заключение. Получаем такие свойства (рис. 243).

Доказать достаточно любое из этих свойств, а остальные окажутся его следствиями.

Докажем, например, первое, применив снова способ «от противного».

Допустим, что $a \parallel b$, но $\angle 1 \neq \angle 2$. Тогда через точку B проведем прямую d, которая наклонена к прямой c под углом α, равным углу 1 (рис. 244). Она не совпадает с прямой b. Прямые a и d параллельны (по первому признаку параллельности прямых п. 8.1). Но тогда через точку B пройдут две прямые b и d, параллельные прямой d. А это противоречит утверждению о единственности параллельной. ■

Остальные два свойства являются следствиями первого.

Действительно, $\angle 2 = \angle 3$ (рис. 245), а $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ (рис. 246). А так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

А теперь сформулируем эти свойства.

Свойство 1. **Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то образованные ими соответственные углы равны.**

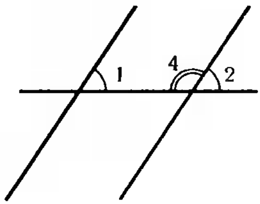
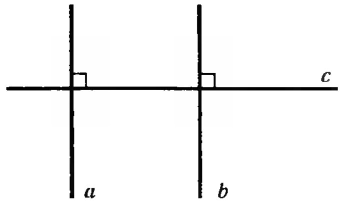


Рис. 246



Если $a \parallel b$ и $a \perp c$, то $b \perp c$

Рис. 247

Свойство 2. **Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то образованные ими внутренние накрест лежащие углы равны.**

Свойство 3. **Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то образованные ими внутренние углы в сумме равны 180°.**

В заключение отметим, что частным случаем каждого из этих свойств является такое утверждение.

Свойство 4. **Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой из них** (рис. 247).

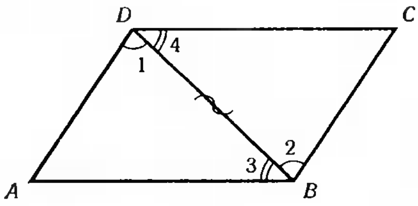
Комментарий

Продолжим разговор о признаках и свойствах, начатый в предыдущей главе. Обратите внимание: у слова «признак» корень «знак», т. е. он как бы подает нам знак, по которому мы из некоторой совокупности фигур можем выбрать те, которые нас интересуют: например, среди всех четырехугольников мы выбираем параллелограммы.

А у слова «свойство» корень — «свой», т. е. то, чем обладает та фигура, о которой идет речь.

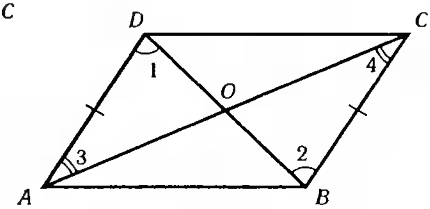
9.5. Свойства параллелограмма. Вспомните признаки параллелограмма, доказанные в п. 8.2, и сопровождавшие их рисунки 222. Теперь сформулируйте утверждения, обратные признакам параллелограмма. Все они начинаются словами: «Если четырехугольник $ABCD$ параллелограмм, то...». Следовательно, все эти утверждения являются свойствами параллелограмма. Закончите их формулировки сами. Например, первое свойство звучит так: если четырехугольник $ABCD$ параллелограмм, то его противоположные стороны равны. А можно сказать и короче:

Свойство 1. **В параллелограмме противоположные стороны попарно равны.**



Если ABCD — параллелограмм, то AB = CD и AD = BC, ∠A = ∠C и ∠B = ∠D

Рис. 248



Если ABCD — параллелограмм, то AO = OC и BO = OD

Рис. 249

Аналогично формулируются и два других свойства.

Свойство 2. **В параллелограмме противоположные углы попарно равны.**

Свойство 3. **В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам.**

Доказательства этих утверждений вы сможете найти, глядя на рисунки 248—249, используя признаки равенства треугольников и свойства параллельных прямых из п. 9.4.

Комментарий

Во многих теоремах этого пункта (да и в дальнейшем) часто встречается слово «попарно»: отрезки (или углы) попарно равны — это значит, равны между собой любые два отрезка (или угла) или, иначе, любая их пара.

В нашем случае противоположные стороны параллелограмма попарно равны — значит, равны между собой любые две противоположные стороны этого параллелограмма.

9.6. Доказательства свойств параллелограмма.

Доказательства свойств 1 и 2. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Проведем его диагональ BD (рис. 248). В треугольниках ABD и BCD общая сторона BD и прилежащие к ней равные углы: $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD) и $\angle 3 = \angle 4$ ($AB \parallel CD$ и секущая BD). Поэтому $\triangle ABD = \triangle CDB$ (по второму признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB = CD$ и $AD = BC$ (первое свойство), а также $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 = \angle D$ (второе свойство). ■

Доказательство свойства 3. Пусть диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 249). В треугольниках AOD и COB равны стороны AD и BC (по свойству 1), а также прилежащие к ним углы: $\angle 1 = \angle 2$ ($AD \parallel BC$ и секущая BD) и $\angle 3 = \angle 4$ ($AD \parallel BC$ и секущая AC). Поэтому $\triangle AOD = \triangle COB$. Следовательно, $AO = OC$ и $DO = OB$. ■

9.7. Характерные свойства фигур и определения. О параллелограмме мы доказали три пары взаимно обратных утверждений. Вот первая из них:

1) четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом;

2) противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

Первое из этих утверждений является признаком параллелограмма. Второе же из них является его свойством. О свойстве фигуры, которое одновременно является и ее признаком, говорят как о **характерном** (или **характеристическом**) **свойстве фигуры**. Таким образом, равенство противоположных сторон четырехугольника — характерное свойство параллелограмма. Точно так же равенство противоположных углов четырехугольника — это тоже характерное свойство параллелограмма.

Давая определение какой-либо фигуры, всегда указывают ее характерное свойство. Но одна и та же фигура может иметь несколько характерных свойств. Поэтому возможны различные определения одной и той же фигуры. Например, возможны такие определения параллелограмма:

1. Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.
2. Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны.
3. Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные углы которого попарно равны.
4. Параллелограммом называется четырехугольник, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам.

Все эти определения относятся к одной и той же фигуре. В этом случае говорят о равносильности нескольких возможных определений. Назовите несколько возможных определений известных вам фигур, например, прямоугольника, ромба, квадрата. Можно ли определить прямоугольник как параллелограмм, диагонали которого равны, а ромб как параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны?

Комментарий

Слово «характерный» греческого происхождения и означает «отличительные черты». Поэтому

характерные свойства — отличительные свойства;

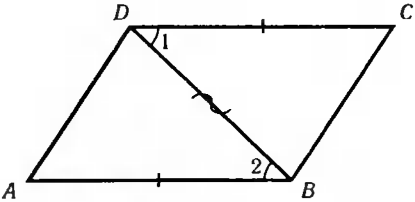
характерные танцы — танцы, свойственные какому-либо народу;

характеристика человека — описание отличительных черт кого-либо.

9.8. Еще один признак параллелограмма. Теперь мы знаем, что у параллелограмма противоположные стороны и равны, и параллельны. Утверждение, обратное этому, является еще одним признаком параллелограмма.

Четвертый признак параллелограмма. **Если в четырехугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.**

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ равны и параллельны стороны AB и CD (рис. 250). Проведем диагональ BD. Тогда $\triangle ABD = \triangle CDB$, так как в них сторона BD — общая, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие). Следовательно, $AD = BC$ и $ABCD$ — параллелограмм по первому признаку. ■



Если AB = CD и AB || CD, то ABCD — параллелограмм

Рис. 250

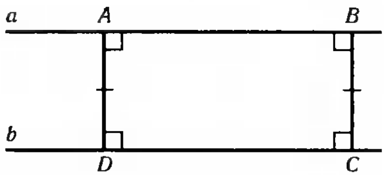


Рис. 251

9.9. Полоса между параллельными прямыми. Слово «параллельная», как мы уже говорили, в переводе с греческого означает «идущая рядом». Более того, можно сказать, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга. Поясним это.

Пусть a и b параллельные прямые (рис. 251). Возьмем на прямой a две точки A и B и опустим из них перпендикуляры AD и BC на прямую b. Получим прямоугольник $ABCD$. Действительно, $AD \perp a$ и $BC \perp a$ (по свойству 4 п. 9.4). А в прямоугольнике противоположные стороны равны. Поэтому $AD = BC$. ■

Отрезок AD (и BC) перпендикулярен прямым a и b. Поэтому он называется **общим перпендикуляром** прямых a и b.

Итак, мы доказали два утверждения.

1. *Из каждой точки одной из двух параллельных прямых идет к другой из них общий перпендикуляр.*

2. *Все общие перпендикуляры двух параллельных прямых равны друг другу и параллельны.*

Эти два утверждения и означают, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга.

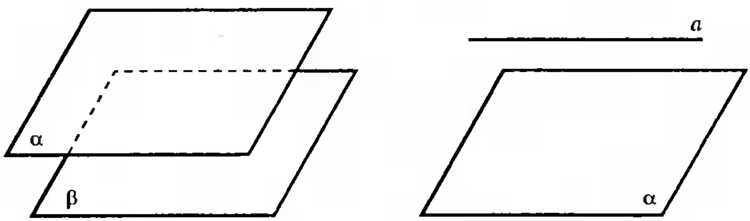
Часть плоскости между параллельными прямыми назовем **полосой**. Можно сказать, что параллельные прямые ограничивают полосу постоянной ширины. **Ширина полосы** — это длина общего перпендикуляра параллельных прямых, ограничивающих полосу.

Наглядную картину высказанных утверждений дают уходящие вдаль рельсы прямой железной дороги (рис. 213, *б*). Их общие перпендикуляры представлены, хотя и несколько грубо, шпалами. Параллельность рельсов проверяют именно по постоянству расстояний, перемещая вдоль них соответствующий шаблон.

§ 10. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

10.1. Определения параллельных фигур в пространстве. Параллельных фигур в пространстве значительно больше, чем на плоскости. Кроме параллельных прямых (или отрезков) появляются еще параллельные плоскости, а также прямые, параллельные плоскости (рис. 252).

Все эти случаи параллельности хорошо можно видеть в комнате (рис. 253), а также на гранях и ребрах прямоугольного параллелепипеда (спичечного коробка, рис. 254). Так, параллельны друг другу ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Параллельность некоторых из этих пар, например, AA_1 и BB_1 или CC_1 и BB_1 для вас очевидна, поскольку эти отрезки являются противоположными сторонами прямоугольников.



а) $\alpha \parallel \beta$ *б)* $a \parallel \alpha$

Рис. 252

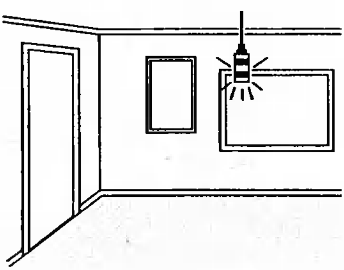


Рис. 253

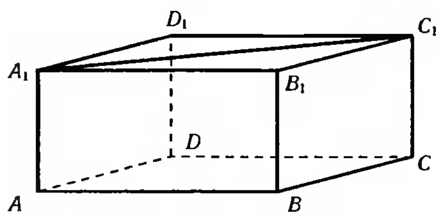


Рис. 254

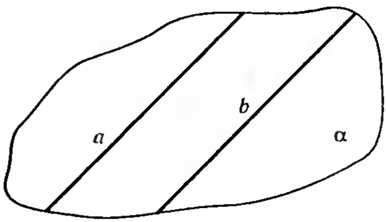


Рис. 255

Труднее установить, что параллельны, например, отрезки AA_1 и CC_1. Можно рассуждать так. Мы уже установили, что $AA_1 \parallel BB_1$ и $CC_1 \parallel BB_1$. Мы знаем, что на плоскости две прямые, параллельные третьей прямой, будут параллельны. Но верно ли это в пространстве? Верно, но доказательство этого утверждения не просто.

Основная трудность в доказательстве в том, чтобы установить, что отрезки AA_1 и CC_1 лежат в одной плоскости. Ведь в пространстве не каждая пара отрезков лежит в одной плоскости. Например, нет такой плоскости, в которой лежали бы отрезки AB и B_1C_1. И, определяя параллельность прямых в пространстве, прежде всего говорят, что это прямые, которые лежат в одной плоскости, а затем уже добавляют, что они не имеют общих точек (или что они не пересекаются).

Итак, говорят, что **две прямые в пространстве параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются** (рис. 255).

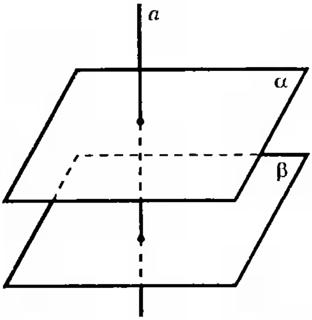
Определение параллельности плоскостей совсем простое: **две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек**.

Например, параллельны плоскости противоположных граней прямоугольного параллелепипеда или куба.

Аналогично говорят, что **прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек**. Привести пример параллельных прямой и плоскости совсем просто. Если две плоскости параллельны, то любая прямая, лежащая в одной из них, параллельна другой плоскости. Так прямая A_1C_1 параллельна плоскости грани $ABCD$ (рис. 254).

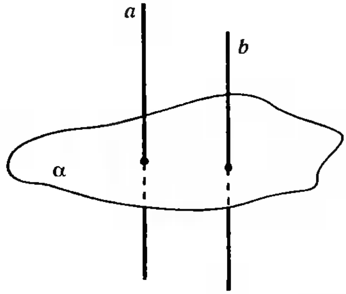
10.2. Вертикали и горизонтали. Перпендикулярность и параллельность в пространстве. Самый простой признак параллельности в планиметрии формулируется так: два перпендикуляра к одной прямой параллельны (рис. 218, *а*). В стереометрии это утверждение, конечно, не верно. Например, в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 254) ребра AA_1 и BC перпендикулярны ребру AB, но ясно, что AA_1 и BC не параллельны (они даже не лежат в одной плоскости).

Утверждения о зависимости параллельности и перпендикулярности, верные в планиметрии, дословно на стереометрию не переносятся.



1) *Если* $\alpha \perp a$ *и* $\beta \perp a$, *то* $\alpha \parallel \beta$
2) *Если* $\alpha \parallel \beta$ *и* $a \perp \alpha$, *то* $a \perp \beta$

Рис. 256



1) *Если* $a \perp \alpha$ *и* $b \perp \alpha$, *то* $a \parallel b$
2) *Если* $a \parallel b$ *и* $a \perp \alpha$, *то* $b \perp \alpha$

Рис. 257

Но соответствующие им аналоги в стереометрии все же есть. Например, если перпендикулярность прямых заменить перпендикулярностью прямой и плоскости, то получим ряд важных теорем стереометрии. Вот они.

1. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны (рис. 256).

2. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой из них (рис. 256).

3. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны (рис. 257).

4. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой из них (рис. 257).

Напомним, что прямая перпендикулярна плоскости, если она пересекает плоскость и перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через точку их пересечения (рис. 258).

Проиллюстрируйте эти теоремы на прямоугольном параллелепипеде. Глядя на него, вы, наверное, обратили внимание, что вообще любые его грани и ребра либо параллельны, либо перпендикулярны. Например, взаимно перпендикулярны три ребра, исходящие из одной вершины или перпендикулярны любые две его соседние грани. О двух пересекающихся плоскостях говорят, что они перпендикулярны, если угол между прямыми, проведенными в этих плоскостях и перпендикулярными их общей прямой, равен 90° (рис. 259).

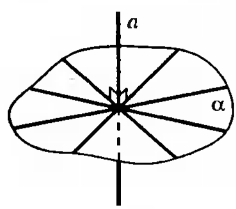


Рис. 258

Можно получить представление о взаимно перпендикулярных и параллельных прямых и плоскостях, рассматривая не только ребра и грани прямоугольного параллелепи-

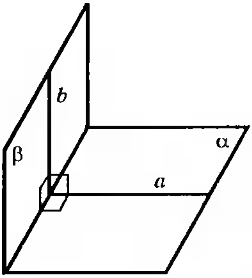


Рис. 259

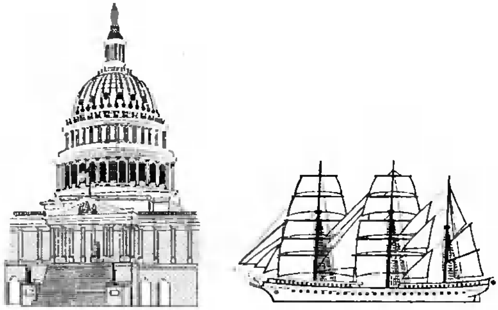


Рис. 260

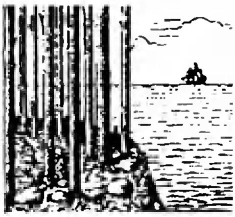


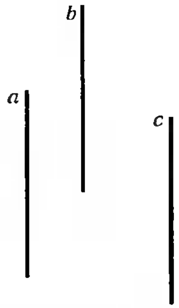
Рис. 261

педа, но просто оглядев обычную комнату (рис. 253). В строительстве параллельность и перпендикулярность стен и перекрытий зданий, различных мачт и столбов и т. п. реально означает их вертикальность и горизонтальность: стены должны быть вертикальными, а полы и потолки — горизонтальными, мачты и телеграфные столбы должны стоять вертикально и т. п. (рис. 260). Да и в природе стволы деревьев тянутся вертикально вверх, перпендикулярно горизонтальной поверхности земли (рис. 261). Поищите, глядя на эти рисунки, еще утверждения о зависимости параллельности и перпендикулярности в пространстве и сформулируйте их как утверждения о вертикалях и горизонталях.

Комментарий

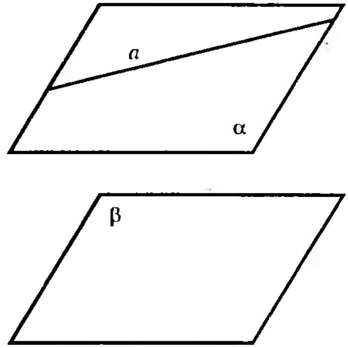
Горизонталь (горизонтальный) означает «параллельный горизонту». Слово «горизонт» происходит от греческого horizon — «ограничивающий» — кривая, ограничивающая часть земной поверхности, доступную взору. Она отделяет видимую для него часть неба от невидимой. Слово «вертикальный» (от латинского verticalis) означает «отвесный».

10.3. Признаки параллельности в пространстве. В двух предыдущих пунктах мы уже сформулировали несколько признаков параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Напомним их.



Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$

Рис. 262



Если $a \parallel \beta$ и $a \subset \alpha$, то $a \parallel \beta$

Рис. 263

Признак параллельности плоскостей. **Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны** (рис. 256).

Первый признак параллельности прямых. **Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны** (рис. 262).

Второй признак параллельности прямых. **Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны** (рис. 257).

Первый признак параллельности прямой и плоскости. **Если прямая лежит в одной из двух параллельных плоскостей, то она параллельна другой плоскости** (рис. 263).

К этим признакам добавим еще два.

Второй признак параллельности прямой и плоскости. **Если прямая не лежит в одной плоскости и параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости** (рис. 264).

Давайте докажем этот признак.

Дано: плоскость α, прямая a в плоскости α, прямая $b \parallel a$ и b не лежит в α (рис. 264).

Доказать: $b \parallel \alpha$.

Доказательство. Поскольку прямые a и b параллельны, то они лежат в некоторой плоскости β. Плоскость β пересекает плоскость α по прямой a. Если бы прямая b, лежащая в плоскости β, имела бы общую точку с плоскостью α, то эта точка лежала бы на прямой a. А это означало

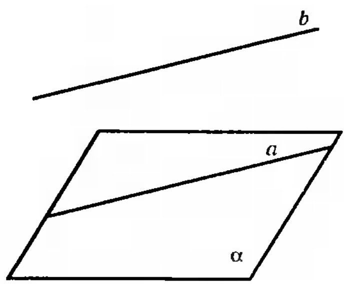
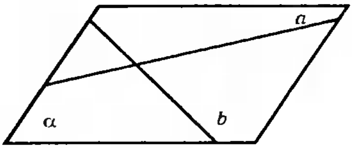


Рис. 264



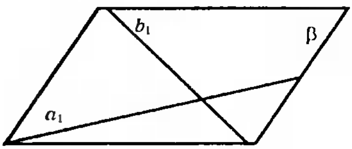


Рис. 265

бы, что прямые a и b пересекаются. Но они параллельны. Получили противоречие. Поэтому общих точек у прямой b и плоскости α нет, т. е. $b \parallel \alpha$. ■

В заключение укажем еще один, второй признак параллельности плоскостей. **Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны** (рис. 265).

Этот признак можно увидеть, глядя на произвольный (но обязательно прямоугольный) параллелепипед (рис. 216).

Попробуйте доказать этот признак способом «от противного».

Попробуйте поискать еще признаки параллельности в пространстве.

10.4. Свойства параллельности в пространстве. Пожалуй, самое главное утверждение о параллельности на плоскости то, в котором говорится, что через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой (рис. 266). Оно верно и в пространстве. Объясните, почему (это не трудно).

Аналогичное утверждение верно и для параллельных плоскостей.

Через каждую точку, не лежащую на данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной плоскости (рис. 267).

А вот прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости, бесконечно много (рис. 268). Все они заполняют плоскость, параллельную данной плоскости.

Как и на плоскости, параллельные прямые и плоскости в пространстве идут на постоянном расстоянии друг от друга (например, как пол

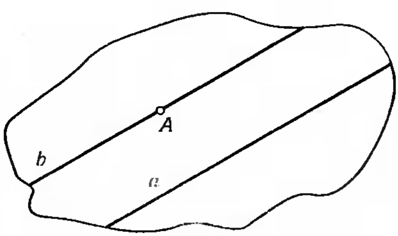


Рис. 266

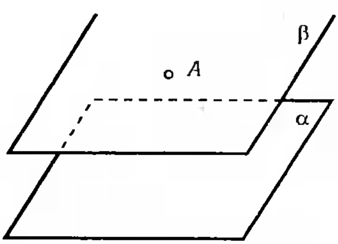


Рис. 267

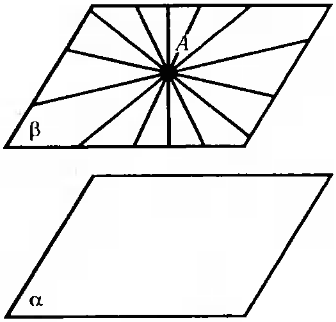


Рис. 268

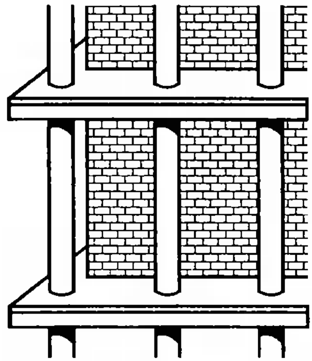
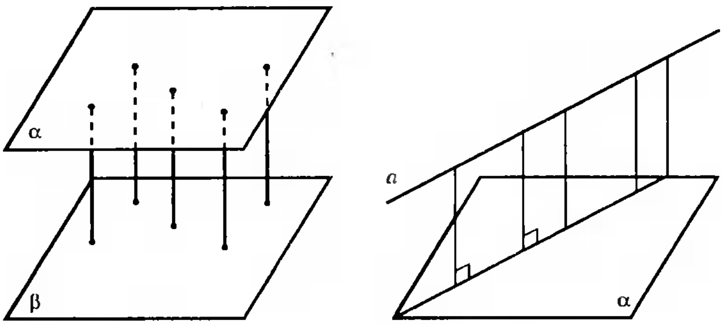


Рис. 269



α || β
а)

a || α
б)

Рис. 270

и потолок в комнате, рис. 269). Объясните, как вы понимаете слова «идут на постоянном расстоянии друг от друга» (рис. 270). Пользуясь именно этим свойством, проверяют параллельность друг другу плоских поверхностей.

10.5. Параллельность на плоскости и параллельность в пространстве. Мы уже обращали ваше внимание на то, что некоторые утверждения о параллельности верны как в планиметрии, так и в стереометрии (например, утверждение о том, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны). Некоторые же утверждения, верные в планиметрии, в стереометрии верны не будут (например, утверждение о том, что два перпендикуляра к одной прямой параллельны). Тем не менее, многие утверждения о параллельности в пространстве можно составить по аналогии с соответствующими свойствами параллельных прямых на плоскости. Приведем примеры.

В плоскости	В пространстве
1. Через точку плоскости, лежащую вне данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой (рис. 271, *а*).	1. Через точку пространства, лежащую вне данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной плоскости (рис. 271, *б*).
2. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую из них (рис. 272, *а*).	2. Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них (рис. 272, *б*).
	2′. Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую (рис. 272, *в*).
3. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой из них (рис. 273, *а*).	3. Если плоскость перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой из них (рис. 273, *б*).

Подумайте, верны ли следующие утверждения (в некоторых из них мы используем понятия о вертикалях и горизонталях):

а) прямая, параллельная одной из параллельных плоскостей, параллельна и другой из них;

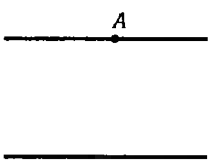
б) две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны;

в) прямая, перпендикулярная вертикальной прямой, горизонтальна;

г) вертикальная прямая перпендикулярна горизонтальной прямой;

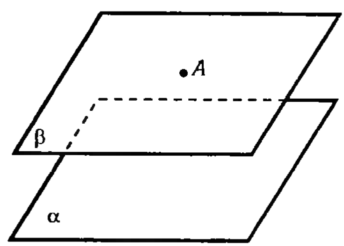
д) если две плоскости вертикальны, то они параллельны;

е) плоскость, параллельная вертикальной плоскости, сама вертикальна;



$b \parallel a$

а)



$\beta \parallel \alpha$

б)

Рис. 271

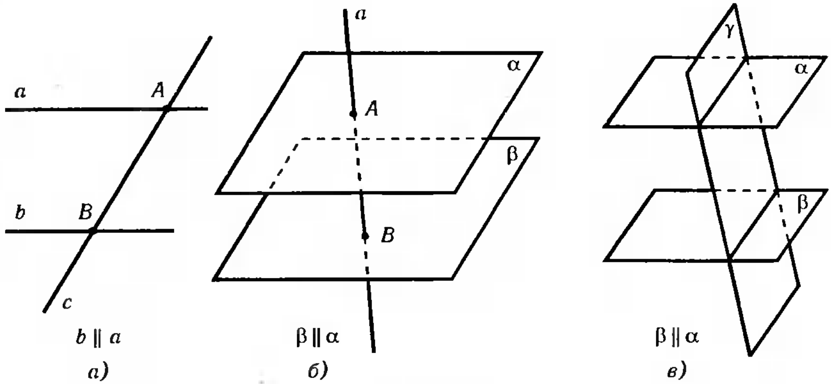


Рис. 272

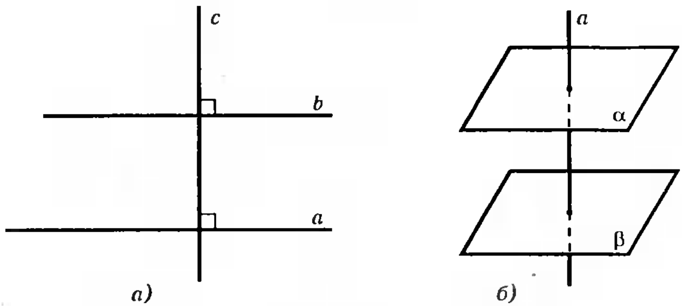


Рис. 273

ж) если две плоскости параллельны, то любые две прямые, лежащие в этих двух плоскостях, также параллельны;

з) если две прямые параллельны, то они лежат в двух плоскостях, параллельных между собой.

И еще подумайте над такими вопросами:

1) На сколько частей делят пространство две параллельные плоскости?

2) На сколько частей делят пространство три параллельные плоскости?

3) На сколько частей могут делить пространство три плоскости?

4) На сколько частей делят пространство плоскости всех граней параллелепипеда?

10.6. Призмы и усеченные пирамиды. Изучая параллельность на плоскости, мы рассматривали простейшие многоугольники, имеющие параллельные стороны — параллелограммы и трапеции. Их аналогами в пространстве являются параллелепипеды, призмы и усеченные пирамиды (рис. 274).

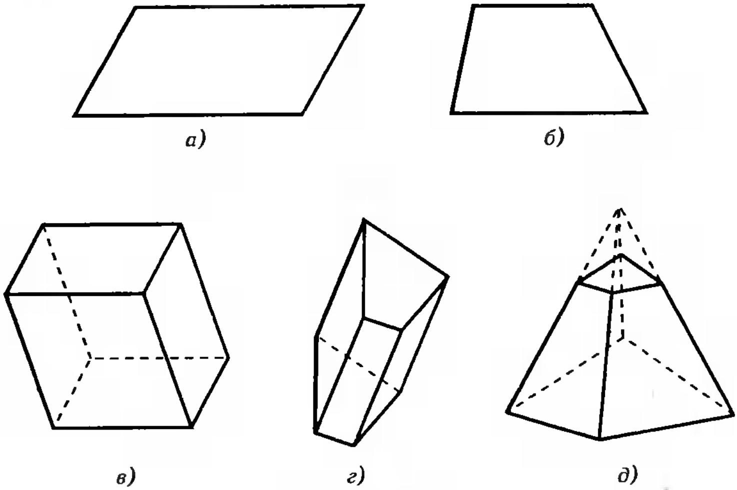


Рис. 274

С прямоугольным параллелепипедом (рис. 275) вы давно знакомы: у него шесть граней — три пары равных друг другу прямоугольников, лежащих в параллельных плоскостях. Если все ребра прямоугольного параллелепипеда равны, то его грани — квадраты, а он сам является кубом (рис. 276). Прямоугольный параллелепипед — это пространственный аналог прямоугольника, а куб — пространственный аналог квадрата.

Пространственным аналогом параллелограмма является параллелепипед (рис. 274, *а*). У параллелепипеда шесть граней — три пары равных друг другу параллелограммов, лежащих в параллельных плоскостях.

Аналогично тому, как диагональ AC параллелограмма $ABCD$ разбивает его на два треугольника ABC и ACD, так диагональное сечение ACC_1A_1 разбивает параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на две **треугольные призмы** $ABCC_1B_1A_1$ и $ADCC_1D_1A_1$ (рис. 277).

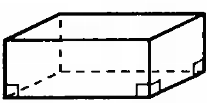


Рис. 275

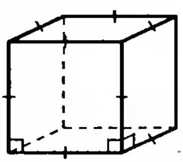


Рис. 276

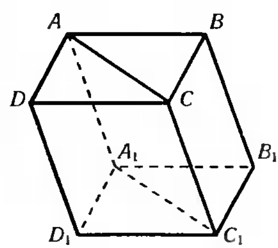


Рис. 277

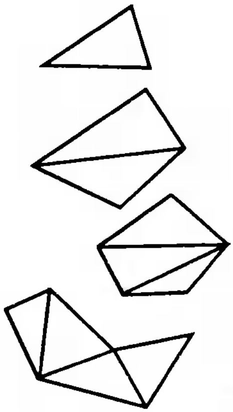


Рис. 278

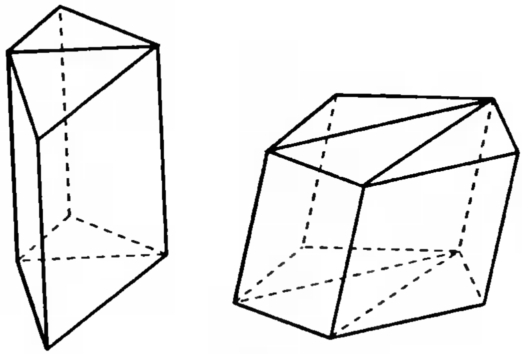


Рис. 279

У треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — два **основания** — равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, лежащие в параллельных плоскостях, и три **боковые грани** — параллелограммы ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1. Их стороны AA_1, BB_1, CC_1 называются **боковыми ребрами** призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Подобно тому, как на плоскости из треугольников можно составлять четырехугольники, пятиугольники и вообще n-угольники, последовательно прикладывая по равным сторонам треугольники (рис. 278), так, прикладывая друг к другу по одинаковым боковым граням треугольные призмы, получаем четырехугольные, пятиугольные и вообще n-угольные призмы (рис. 279).

У n-угольной призмы $n + 2$ грани: два основания, лежащие в параллельных плоскостях, и n боковых граней — параллелограммов.

Призмы можно получить и так. Возьмем в плоскости α многоугольник P (рис. 280). Из его вершин проведем в одно полупространство равные и параллельные друг другу отрезки, а затем последовательно соединим отрезками их концы. Тогда получится многоугольник P_1, рав-

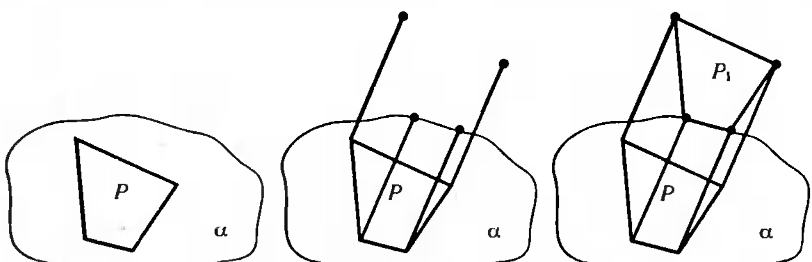


Рис. 280

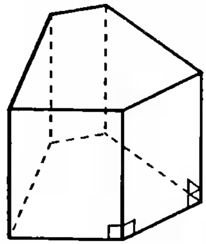


Рис. 281

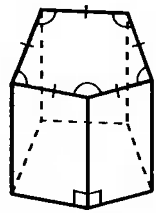


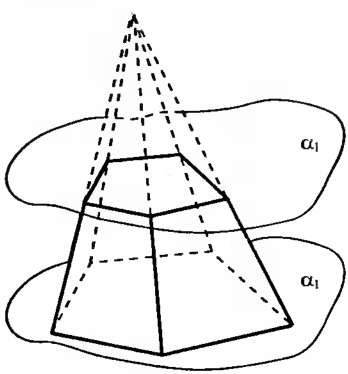
Рис. 282

ный многоугольнику P и лежащий в плоскости α_1, параллельной плоскости α. А между плоскостями α и α_1 образуется столько параллелограммов, сколько сторон у многоугольника P. Эти параллелограммы вместе с многоугольниками P и P_1 ограничат в пространстве многогранник — призму, основаниями которой являются многоугольники P и P_1. Параллелограммы же называются **боковыми гранями** призмы, а ребра призмы, соединяющие вершины различных оснований,— **боковыми ребрами призмы**.

В том случае, когда боковые ребра (и грани) призмы перпендикулярны плоскостям оснований, призма называется **прямой** (рис. 281). Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Если у оснований прямой призмы равны все стороны и все углы, то призма называется **правильной** (рис. 282).

Параллелепипед является особой призмой — любую пару его противоположных граней можно считать основаниями.

Аналогом трапеции можно считать усеченную пирамиду (рис. 283). Подобно тому, как от треугольника прямая, параллельная одной из его сторон, отсекает трапецию (рис. 284), так от пирамиды плоскость, па-



$\alpha_1 \parallel \alpha$

Рис. 283

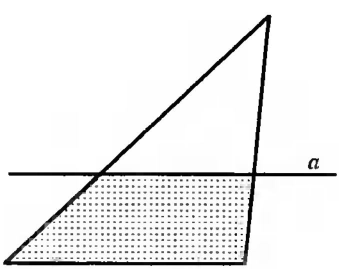


Рис. 284

раллельная ее основанию, отсекает усеченную пирамиду. **Усеченная пирамида** — это часть пирамиды, лежащая в слое между плоскостью основания и плоскостью, ей параллельной.

Комментарий

Слово «призма» происходит от греческого prisma (в переводе — «пилю»). Первоначально оно означало тело, все параллельные разрезы которого представляют собой равные многоугольники. Конечно, не все такие тела являются призмами. Например, можно из двух наклонных призм составить тело, которое призмой не является, но у которого сечения плоскостями, параллельными основаниям, являются одинаковыми многоугольниками. Попробуйте нарисовать такое тело.

Возможно, вам приходилось держать в руках стеклянную призму. Тогда вы, наверное, заметили, что такая призма обладает свойством разлагать световой луч на составляющие разного цвета.

ЗАДАЧИ К § 8

Вопросы для самоконтроля

- Как могут быть расположены две прямые на плоскости?
- В старых учебниках геометрии параллельными прямыми называли такие прямые, которые не пересекаются, сколько бы их ни продолжали. Как вы поясните такое определение?
- Какие признаки параллельности вы знаете?
- Что такое трапеция? А что такое равнобокая трапеция?
- Какие признаки параллелограмма вы знаете?
- Можете ли вы назвать признаки прямоугольника?
- Будет ли четырехугольник прямоугольником, если у него есть два прямых угла?
- Какие признаки ромба вы знаете?
- Можете ли вы перечислить признаки квадрата?
- Какая неплоская фигура аналогична параллелограмму? прямоугольнику? квадрату?

Основная задача

8.1. а) Докажите, что противоположные стороны прямоугольника параллельны. б) Объясните, почему прямоугольник является параллелограммом. в) Почему параллелограммом является ромб? г) Почему параллелограммом является квадрат?

Задачи к пункту 8.1

А

8.2. На рис. 358 выберите такую прямую, которая пересекает две другие прямые. Отметьте какой-либо из углов, образованных при этом

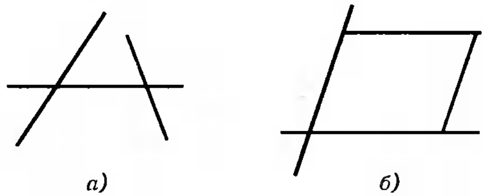


Рис. 358

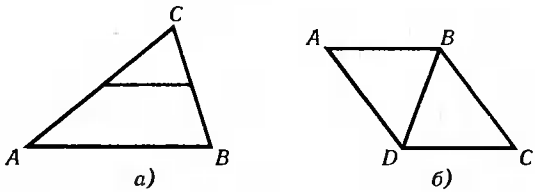


Рис. 359

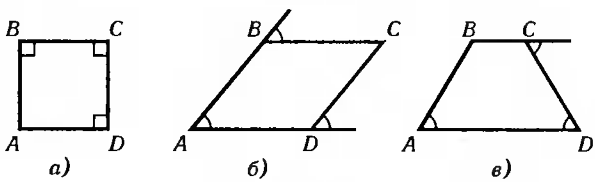


Рис. 360

пересечении. Укажите для этого угла: а) соответственный угол; б) накрест лежащий угол.

8.3. Отметьте какой либо угол на рис. 359. Есть ли для него: а) соответствующий угол; б) накрест лежащий угол?

8.4. Укажите параллельные прямые на рис. 360.

8.5. На сколько частей могут разделить плоскость три прямые? А четыре?

Б

8.6. Докажите, что прямые параллельны, если: а) внешние накрест лежащие углы равны; б) сумма внутренних односторонних углов равна 180°; в) сумма внешних односторонних углов равна 180°.

В

8.7. Нарисуйте отрезок. Постройте отрезок, симметричный данному, относительно некоторой точки, не лежащей на отрезке. Как расположены данный и построенный отрезки?

8.8. Укажите параллельные прямые на рис. 361.

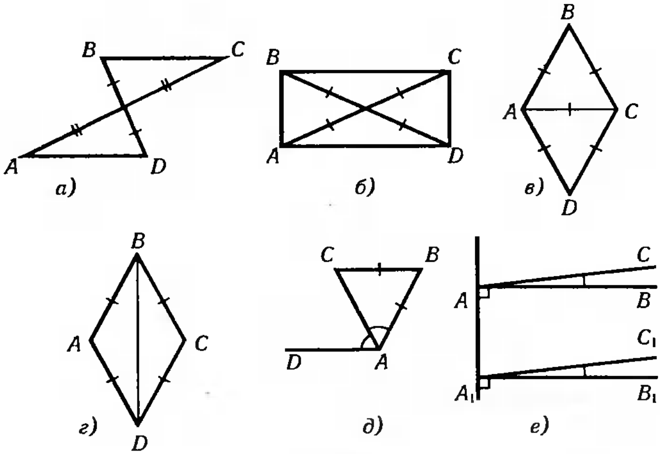


Рис. 361

8.9. Объясните, почему три точки одной окружности не лежат на одной прямой.

8.10. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$. Проведена биссектриса внешнего угла при вершине B. Докажите, что она параллельна основанию треугольника.

8.11. Нарисуйте угол O. а) На одной его стороне отложите два отрезка OA_1 и A_1A_2, а на другой — отрезок $OB_1 = OA_1$, а затем отрезок $B_1B_2 = A_1A_2$. Докажите, что $A_2B_2 \parallel A_1B_1$.

б) Продолжите стороны угла за вершину O. На сторонах угла O отложите два равных отрезка OA_1 и OB_1, а на продолжениях сторон — два равных отрезка OA_2 и OB_2. Докажите, что $A_2B_2 \parallel A_1B_1$.

8.12. Нарисуйте два равных треугольника ABC_1 и ABC_2 с одной стороны от прямой AB. Докажите, что $C_1C_2 \parallel AB$.

8.13. Нарисуйте равнобедренный треугольник. а) Проведите медианы из вершин основания. Их концы соедините отрезком. Докажите, что он параллелен основанию.

б) Изменится ли результат, если вместо медиан провести биссектрисы?

в) Изменится ли результат, если вместо медиан провести высоты?

8.14. Нарисуйте окружность, а в ней диаметр. Из разных концов диаметра проведите равные хорды. Будут ли они параллельны?

8.15. Нарисуйте прямой угол A_1CB_1. На лучах CA_1 и CB_1 выберите точки A и B соответственно. Углы A_1AB и B_1BA разделены на три равные части каждый лучами, выходящими из точек A и B. Докажите, что два из них лежат на параллельных прямых.

8.16. На окружности поставлены по порядку точки A, B, C, D. При этом $AB = BC = CD$. Докажите, что $AD \parallel BC$. Среди условий есть лишнее. Какое?

Задачи к пунктам 8.2 и 8.3
Трапеция

А

8.17. Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ на рис. 362 является трапецией?

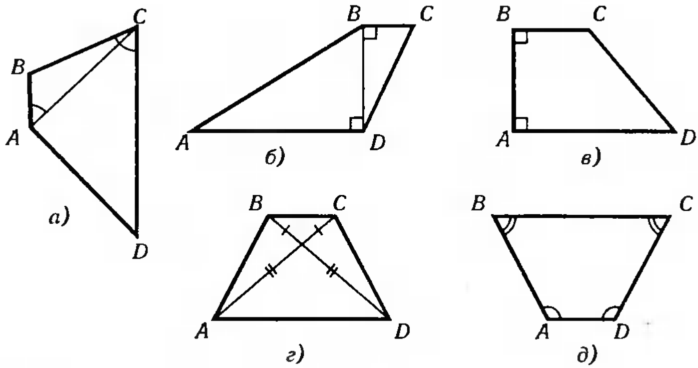


Рис. 362

8.18. Нарисуйте трапецию. Проведите в ней диагонали. а) На сколько треугольников разбилась эта трапеция? б) А сколько всего треугольников на этом рисунке?

8.19. Нарисуйте любую трапецию. Разделите ее одной прямой на: а) параллелограмм и треугольник; б) параллелограмм и трапецию; в) две трапеции; г) два треугольника; д) два четырехугольника, причем без параллельных сторон; е) треугольник и пятиугольник.

Б

8.20. Равнобокую трапецию нарисовали мелом на доске. Потом часть ее стерли. Сможете ли вы восстановить трапецию, если от нее остались: а) основание и боковая сторона; б) основание и диагональ; в) боковая сторона и диагональ; г) основание и точка пересечения диагоналей; д) боковая сторона и точка пересечения диагоналей?

8.21. Возьмите лист бумаги в форме четырехугольника. Вам требуется вырезать из него трапецию, основание которой совпадает со стороной четырехугольника. а) Как это сделать? б) Всегда ли можно это сделать?

8.22. Заготовка из дерева является трапецией. Сколько понадобится таких заготовок, чтобы сделать: а) чертежный треугольник; б) рамку для картины?

В

8.23. Нарисуйте трапецию как результат: а) пересечения двух трапеций; б) объединения двух треугольников; в) объединения прямоугольника и двух треугольников; г) объединения двух трапеций; д) объединения квадрата и прямоугольного треугольника; е) объединения двух прямоугольных треугольников; ж) объединения равностороннего и прямоугольного треугольников; з) объединения двух равнобедренных треугольников; и) объединения трех равносторонних треугольников; к) объединения четырех прямоугольных треугольников.

8.24. Можно ли составить трапецию из: а) двух равных прямоугольных треугольников; б) двух равносторонних треугольников; в) двух равных равнобедренных треугольников?

Параллелограмм

А

8.25. Объясните, откуда следует, что четырехугольник на рис. 363 является параллелограммом.

8.26. Нарисуйте параллелограмм. а) Проведите хорду, параллельную какой-либо его стороне. Сколько параллелограммов на вашем рисунке? б) Проведите еще одну такую же хорду. Ответьте на тот же вопрос. в) Проведите теперь две хорды, параллельные разным его сторонам. Ответьте на тот же вопрос. г) Составьте сами похожую задачу.

8.27. Нарисуйте любой параллелограмм. Как разделить его на:

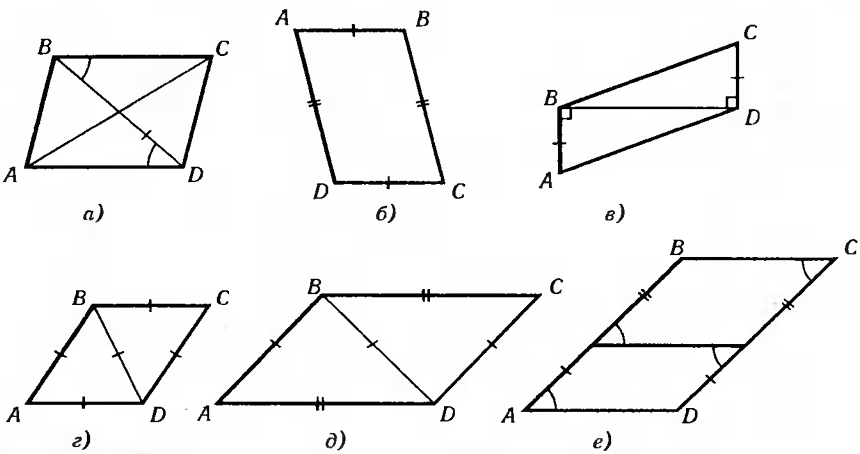


Рис. 363

а) два треугольника; б) треугольник и трапецию; в) две трапеции; г) два параллелограмма?

Б

8.28. Параллелограмм нарисовали мелом на доске. Потом часть его стерли. Сможете ли вы восстановить параллелограмм, если от него остались: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не лежащая на ней; г) сторона и точка пересечения диагоналей; д) три вершины; е) середины трех сторон?

8.29. Вырежьте из бумаги треугольник. Разрежьте его на две части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм.

8.30. Как получить параллелограмм одними только сгибаниями тетрадного листа?

8.31. Объясните, откуда следует, что четырехугольник $ABCD$ на рис. 364 является параллелограммом.

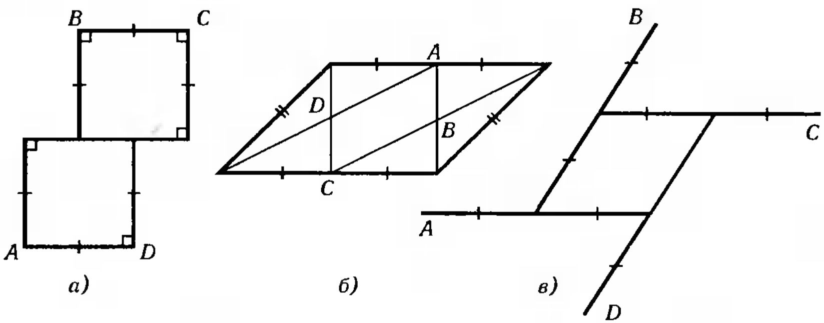


Рис. 364

8.32. Нарисуйте параллелограмм как результат пересечения: а) двух углов; б) двух треугольников; в) двух параллелограммов; г) двух трапеций.

8.33. Нарисуйте параллелограмм как объединение: а) двух треугольников; б) двух параллелограммов; в) прямоугольника и двух треугольников; г) треугольника и трапеции; д) двух трапеций.

Задачи к пункту 8.4

8.34. Дана прямая и точка вне ее. Как построить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку, используя только: а) циркуль и линейку; б) линейку и угольник; в) угольник; г) линейку? (Под линейкой и угольником понимаются чертежные инструменты.)

8.35. Постройте параллелограмм по: а) сторонам и диагонали; б) сторонам и углу; в) двум диагоналям и углу между ними.

Задачи к пункту 8.5

А

8.36. Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ на рис. 365 является прямоугольником.

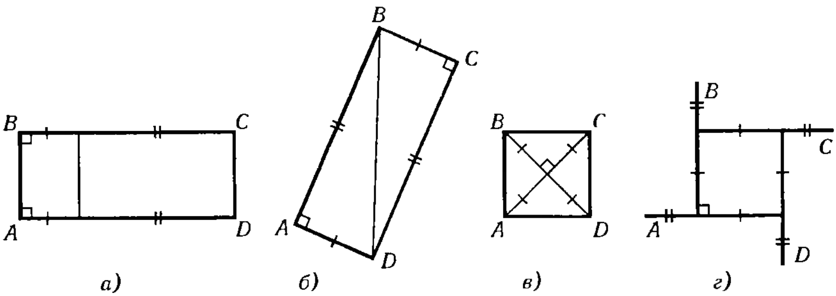


Рис. 365

8.37. Как разделить прямоугольник на: а) два прямоугольника; б) три прямоугольника; в) четыре прямоугольника; г) два равных треугольника; д) четыре равных треугольника; е) параллелограмм и два треугольника; ж) шесть равных треугольников; з) пять равных прямоугольников; и) две части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник?

8.38. Нарисуйте квадрат. Отметьте его вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей — всего девять точек. Сколько вы сможете насчитать прямоугольников с вершинами в этих точках?

Б

8.39. Прямоугольник нарисовали мелом на доске, а потом стерли. Сможете ли вы восстановить его, если от него остались: а) сторона и вершина, не лежащая на ней; б) сторона и середина противолежащей стороны; в) диагональ и вершина, не лежащая на ней; г) средняя линия и точка на противоположной стороне; д) диагональ; е) средняя линия?

8.40. Восстановите квадрат, если от него остались лишь: а) сторона; б) диагональ; в) средняя линия; г) центр и две точки на противоположных сторонах.

8.41. Придумайте приспособление для измерения толщины бревна в любом его месте.

8.42. Вы идете лесом по прямой и вдруг — болото. Как его обойти так, чтобы выйти на ту же прямую, по которой вы шли?

В

8.43. Нарисуйте прямоугольник как: а) пересечение двух прямых углов; б) объединение двух равнобедренных треугольников; в) объединение двух одинаковых трапеций; г) объединение двух квадратов.

8.44. Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ на рис. 366 является прямоугольником?

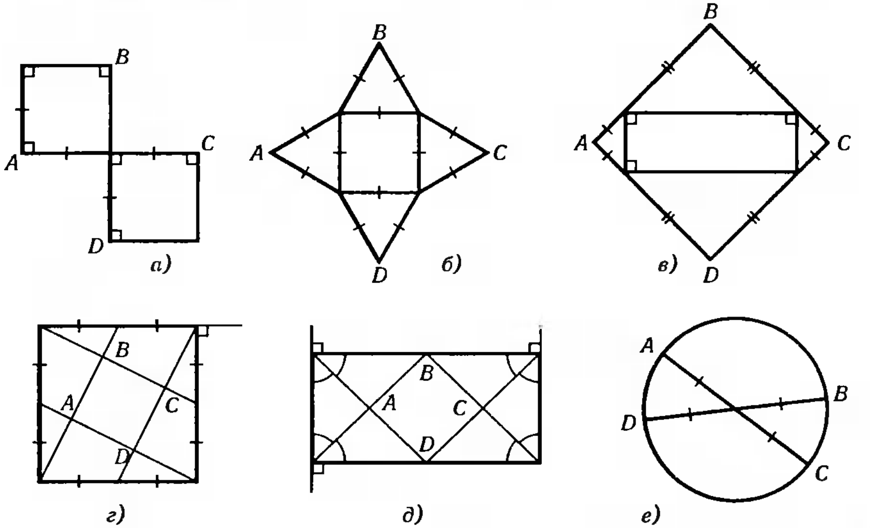


Рис. 366

8.45. Постройте прямоугольник по: а) стороне и диагонали; б) диагонали и ее углу со стороной; в) диагонали и ее углу с другой диагональю.

Задачи к пункту 8.6
Квадрат

8.46. Является ли квадратом такой прямоугольник, у которого: а) точка пересечения диагоналей равноудалена от сторон; б) диагонали перпендикулярны; в) диагонали являются биссектрисами; г) диагонали делят его на четыре равных треугольника?

8.47. Найдутся ли четыре точки, являющиеся вершинами квадрата, на сторонах: а) квадрата; б) прямоугольника; в) ромба; г) равнобедренного прямоугольного треугольника; д) произвольного прямоугольного треугольника; е) произвольного треугольника?

8.48. Как составить квадрат из: а) двух прямоугольных треугольников; б) двух прямоугольников; в) двух трапеций; г) четырех прямоугольных треугольников; д) трех треугольников; е) равносторонних треугольников?

8.49. Восстановите квадрат по таким оставшимся от него точкам: а) двум соседним вершинам; б) двум противоположным вершинам; в) вершине и центру (точке пересечения диагоналей); г) серединам двух противоположных сторон; д) серединам двух соседних сторон; е) центру и двум точкам на одной стороне. ж) Пираты зарыли клад в одной из вершин квадрата. На карте местности они отметили три камня, о которых стало известно, что ими отмечены центр квадрата и точки на его сторонах. Займетесь ли вы поисками клада?

8.50. Постройте квадрат по: а) стороне; б) диагонали; в) сумме диагонали и стороны.

8.51. Как получить квадрат одними только сгибаниями любого листа бумаги?

Ромб

8.52. Является ли ромбом такой параллелограмм, у которого: а) диагональ делит его на два равносторонних треугольника; б) одна из диагоналей делит угол пополам; в) точка пересечения диагоналей равноудалена от его сторон; г) есть прямой угол; д) диагонали равны?

8.53. Найдутся ли точки, являющиеся вершинами ромба на сторонах: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба; г) равнобедренного прямоугольного треугольника; д) произвольного прямоугольного треугольника; е) произвольного треугольника?

8.54. Составьте задачи о ромбе, аналогичные задаче **8.48.**

8.55. Постройте ромб по: а) стороне и углу; б) стороне и диагонали; в) двум диагоналям; г) диагонали и углу; д) высоте и углу.

8.56. Как получить ромб одними только сгибаниями тетрадного листа?

ЗАДАЧИ К § 9

Вопросы для самоконтроля

- В чем состоит утверждение о единственности прямой, параллельной данной?
- Какие следствия можно получить из утверждения о единственности?
- Какие признаки параллельности прямых вам известны?
- Какие свойства параллельных прямых можете перечислить?
- Какими свойствами обладает параллелограмм?
- Какие признаки параллелограмма вы знаете?
- Можете ли назвать свойства прямоугольника?
- Какие свойства ромба вам известны?
- Какие свойства квадрата можете перечислить?
- Какие свойства полосы вы знаете?

- Как доказывается, что некоторое свойство фигуры является ее характерным свойством?
- Какие примеры характерных свойств разных фигур можете привести самостоятельно?
- О каких лучах говорят, что они имеют одинаковое направление? А противоположное?
- Как вы понимаете фразу: «Две точки движутся в одном направлении»? А фразу о движении в противоположных направлениях?

Основные задачи

9.1. Нарисуйте две параллельные прямые a и b. Нарисуйте точку, не лежащую на этих прямых. Нарисуйте перпендикуляры из этой точки на a и b. Докажите, что эти перпендикуляры лежат на одной прямой.

9.2. Нарисуйте две параллельные прямые a и b. Нарисуйте затем прямую c, перпендикулярную прямой a, и прямую d, перпендикулярную прямой b. Пусть прямые c и d различны. Докажите, что они параллельны. Перескажите доказанное утверждение как признак параллельности прямых.

Задачи к пунктам 9.1 и 9.2

9.3. Лист бумаги лежит на столе. Его ближний край совпадает с краем стола. Объясните, почему его дальний край параллелен дальнему краю стола? (И лист и стол — прямоугольные.)

9.4. Два листа бумаги расположены на столе так, что у них оказались параллельными горизонтальные края. При этом вертикальные их края также соответственно параллельны. Почему? (Листы — прямоугольные.)

9.5. С помощью линейки проведите пять параллельных отрезков. Объясните, почему параллельны между собой первый и пятый отрезки? Как выглядит обобщение этой задачи?

9.6. Из одного угла прямоугольного листа бумаги в клеточку проведен отрезок, который доходит до края этого листа. Как он проведен, если при этом он пересекает: а) горизонтальных и вертикальных линий поровну; б) горизонтальных линий больше, чем вертикальных; в) вертикальных линий больше, чем горизонтальных?

9.7. На сколько частей разбивают плоскость параллельные прямые, если их: а) две; б) три; в) четыре; г) десять; д) n? Как это доказать в случаях г) и д)?

9.8. Параллельными прямыми плоскость разбита на части. Сколько этих прямых, если число полученных частей равно: а) 3; б) 10; в) 1993? Как это доказать?

9.9. На сколько частей могут разбить плоскость: а) две прямые; б) три прямые; в) четыре прямые?

9.10. Пятью прямыми плоскость разбита на 12 частей. Нарисуйте такие прямые.

9.11. Имеются три прямые: a, b, c. Пусть при этом: а) a параллельна b и b параллельна c. Сколько тут пар параллельных прямых? б) a параллельна b и пересекает c. Сколько тут пар пересекающихся прямых? в) a пересекает b и b пересекает c. Сколько тут пар пересекающихся прямых?

9.12. О трех прямых было сказано следующее: а) среди них есть одна пара параллельных прямых; б) они разбивают плоскость на шесть частей; в) среди них есть пара пересекающихся прямых. Возможно ли, чтобы все эти утверждения были верными?

9.13. О трех прямых было сказано следующее: а) среди них ровно одна пара параллельных прямых; б) среди них ровно одна пара пересекающихся прямых; в) плоскость разбита ими на такие части, среди которых нет треугольника. Могут ли быть верными все три сообщения? А какие-либо два из них?

Задачи к пункту 9.4

А

9.14. Укажите равные углы на рис. 367, где прямая a параллельна прямой b, а прямая c параллельна прямой d.

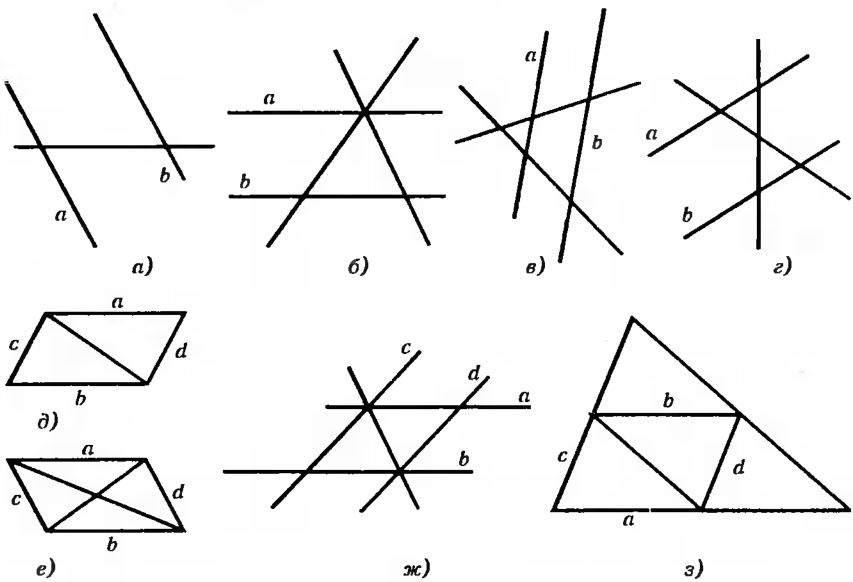


Рис. 367

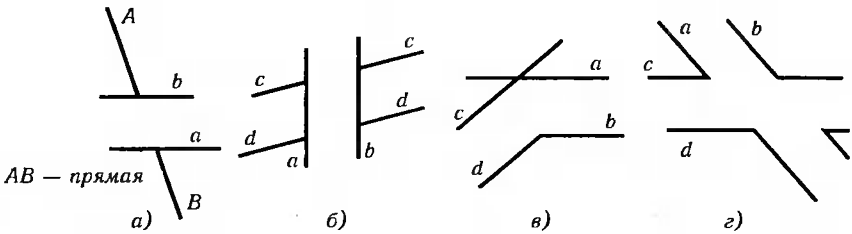


Рис. 368

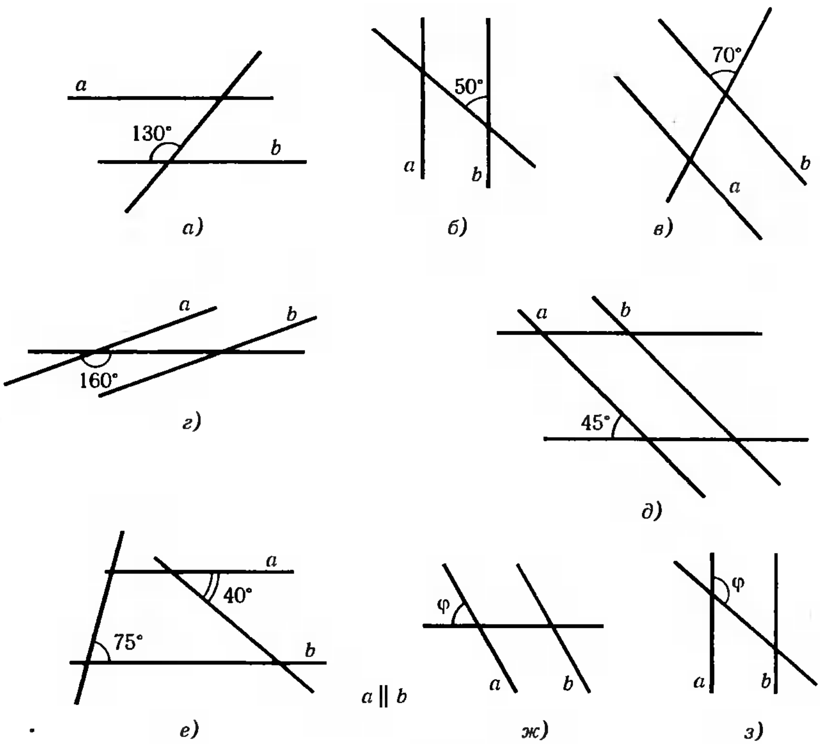


Рис. 369

9.15. Укажите равные углы на рис. 368, где прямая a параллельна прямой b, а прямая c параллельна прямой d.

9.16. Вычислите величины некоторых углов на рис. 369, если известно, что прямые a и b параллельны.

9.17. Найдите неизвестные углы на рис. 370.

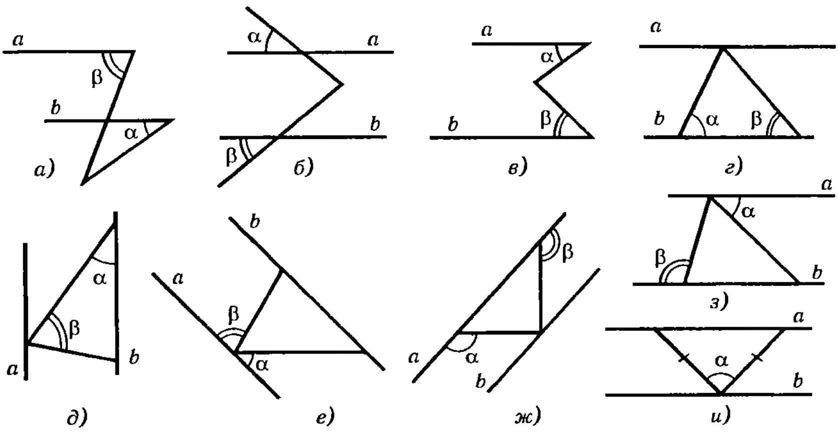


Рис. 370

9.18. Придумайте сами задачи, похожие на задачи предыдущих двух номеров.

Б

9.19. Прямоугольный лист бумаги согнули так, что линия сгиба пересекает две его противоположные стороны. Разогните лист и укажите на нем полученные равные углы.

9.20. Два шоссе пересекаются за пределами карты. Как найти угол между ними?

9.21. На листе бумаги нарисовали угол, а потом оторвали его вершину. Сможете ли вы построить биссектрису этого угла?

9.22. Биллиардный стол имеет форму прямоугольника. Шар находится на средней линии стола. Его ударяют о борт под углом 45°. Угол падения при ударе шара о борт равен углу отражения. Можно ли его поставить с самого начала так, чтобы его траектория прошла через начальную точку?

В

9.23. Две параллельные прямые пересечены третьей. Сколько при этом может быть углов: а) острых; б) тупых; в) прямых; г) равных?

9.24. Пусть известны углы, которые прямая c составляет с прямыми a и b. Сможете ли вы найти угол между прямыми a и b?

9.25. О прямых a, b и c известно: 1) прямые a и b параллельны, а прямая c составляет с ними равные углы; 2) прямые a и b параллельны, а прямая c составляет с ними неравные углы; 3) прямые a и b пересекаются, а прямая c составляет с ними равные углы; 4) прямые

a и b пересекаются, а прямая c составляет с ними неравные углы. Содержат ли эти данные противоречия?

9.26. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B. Докажите, что прямая, проходящая через B параллельно AC, является биссектрисой внешнего угла треугольника.

9.27. Прямая пересекает боковые стороны равнобедренного треугольника ABC с вершиной в точке A в точках K и L. Объясните, почему прямая отсекает от данного треугольника равнобедренный треугольник, если она параллельна BC. А какой треугольник она будет отсекать, если исходный треугольник будет равносторонним?

9.28. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK угла A, а из точки K проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает сторону AB в точке L. Оказывается, что треугольник AKL — равнобедренный. Докажите это.

9.29. Проведена хорда KL треугольника ABC, параллельная AC; $AC = 1$. Сможете ли вы узнать, насколько больше периметр треугольника ABC, чем периметр треугольника BKL?

9.30. В круге проведены параллельные между собой диаметр AB и хорда CD. Докажите, что хорды AC и BD видны из центра под равными углами.

9.31. Через концы одного диаметра окружности проведены две параллельные хорды. Докажите, что они равны. Проверьте обратное.

9.32. Через точку B треугольника ABC провели прямую, параллельную AC. Рассмотрев углы при вершине B, можно заметить, что в сумме они составляют столько же, сколько углы исходного треугольника. Значит ли это, что мы таким образом можем доказать теорему о сумме углов треугольника?

Задачи к пунктам 9.5 и 9.6
Параллелограмм

Основная задача

9.33. Докажите такие свойства параллелограмма: а) сумма его соседних углов равна 180°; б) диагональ образует с противоположными сторонами равные углы.

А

9.34. На рис. 371 обозначены некоторые величины параллелограмма. Какие еще величины можно найти?

9.35. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$ такой, что: а) AD меньше AB и угол A тупой; б) BC меньше CD и угол B тупой; в) AD больше AB и угол C острый; г) BC больше AB и угол D прямой; д) его диагонали равны; е) его диагонали перпендикулярны.

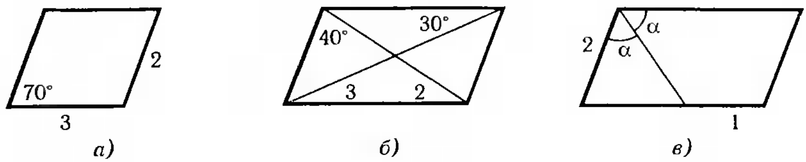


Рис. 371

9.36. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Не рисуя его, постарайтесь ответить на такие вопросы: а) Пусть AD больше AB. Что больше: AD или CD? BC или AB? б) Пусть угол B тупой. Какой угол больше: $\angle C$ или $\angle D$?

9.37. Нарисуйте такой параллелограмм, в котором есть диагональ, которая: а) длиннее каждой стороны; б) короче каждой стороны; в) равна одной из сторон; г) равна каждой стороне.

9.38. Чему равен периметр параллелограмма, если его стороны равны: а) 1 м и 2 м; б) 15 см и 26 мм; в) a и b. А чему равен его периметр, если он составлен из двух равнобедренных треугольников с периметром 1?

9.39. Чему равны стороны параллелограмма, если его периметр равен 2 м и: а) разность соседних сторон равна 1 см; б) отношение соседних сторон равно 2; в) он составлен из двух равнобедренных треугольников с периметром 1 м?

9.40. Вычислите углы параллелограмма, если один из его углов: а) 20°; б) 100°; в) в 2 раза больше другого; г) на 90° больше другого.

9.41. Сколько углов каждого вида может быть в параллелограмме? А в трапеции?

Б

9.42. Из листа бумаги вырежьте параллелограмм. Займемся его перегибанием и наблюдениями за тем, что будет получаться. Итак, что вы увидите, если при его перегибании совпали: а) соседние вершины; б) противоположные вершины?

9.43. Придумайте определение равным параллелограммам. Оказывается, если бы паркет делали из равных параллелограммов, то им можно было бы выложить всю плоскость. Как вы это объясните?

9.44. Используя свойства и признаки параллелограмма, придумайте способ нахождения расстояния между двумя пунктами на одном берегу реки, находясь на другом ее берегу. Что это за способ?

9.45. Как сделать параллелограмм, у которого периметр равен 80 см и: а) острый угол равен 20°; б) стороны равны; в) одна из диагоналей равна стороне; г) угол между диагоналями прямой; д) диагонали равны?

В

9.46. Сформулируйте и проверьте утверждения, обратные утверждениям о свойствах параллелограмма: а) его противоположные стороны равны; б) диагональ делит его на равные треугольники; в) диагональ составляет с противоположными сторонами равные углы; г) противоположные углы равны.

9.47. Докажите, что в параллелограмме биссектрисы соседних углов перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны (или лежат на одной прямой).

9.48. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрису угла A.

а) Пусть она пересекает BC в точке K. Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Пусть она пересекает прямую CD в точке L. Сколько равнобедренных треугольников вы сможете насчитать на полученном рисунке?

в) Пусть известны периметры треугольников ABK и KCL. Сможете ли вы найти периметр треугольника ADL?

г) Может ли точка K быть серединой BC?

д) Оказывается, если точка K — середина BC, то точка C — середина DL. Докажите это.

е) Пусть теперь DM — биссектриса угла D и точка M лежит на BC. Сможете ли вы, зная стороны параллелограмма, найти MK?

ж) Пусть точки K и M совпадают. Что вы сможете доказать в этом случае?

9.49. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма (ее называют еще центром параллелограмма) провели прямую. Она пересекает стороны параллелограмма в точках A и B. Докажите, что точка O делит отрезок AB пополам.

9.50. В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной B $AB = 2$, $AC = 3$. Точка X движется по AC. Из нее проводятся два отрезка: XK параллельный BC, где точка K лежит на AB, и XL параллельный AB, где точка L лежит на BC. Пусть $XA = x$. Выразите через x периметр четырехугольника $KBLX$.

9.51. Внутри угла взяли точку. Проведите через нее такую хорду угла, которая этой точкой делится пополам.

Прямоугольник

Основные задачи

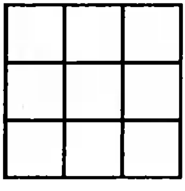


Рис. 372

9.52. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника (его центр) равноудалена от его вершин.

9.53. Сколько на рис. 372: а) прямоугольников; б) различных прямоугольников?

9.54. Нарисуйте прямоугольник, у которого: а) диагональ в 2 раза больше меньшей стороны; б) диагональ делит угол пополам; в) диагональ перпендикулярна другой диагонали.

9.55. Нарисуйте четырехугольник с равными диагоналями, но не прямоугольник.

Б

9.56. Какая получится фигура, если: а) от прямоугольника отрезать прямоугольник; б) к прямоугольнику приставить такой же прямоугольник?

9.57. Прямоугольный лист бумаги согнули пополам, а затем полученный лист тоже согнули пополам. От того угла, где оказался центр прямоугольника, отрезали: а) треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник. Можете ли вы доказать, какая будет форма дыры, если развернуть лист?

9.58. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Ее боковые ребра PA, PB, PC, PD равны. а) Для каждой ее треугольной грани укажите равную ей треугольную грань. б) Пусть KL — средняя линия основания. Докажите, что треугольник PKL — равнобедренный. в) Пусть от вершин A и D отложены на ребрах AB и CD равные отрезки AM и DN. Докажите, что треугольник PMN — равнобедренный. г) Тот же результат получится, если отрезок, равный AM, отложить на ребре CD от точки C. Докажите это.

В

9.59. Найдите неизвестный отрезок x на рис. 373.

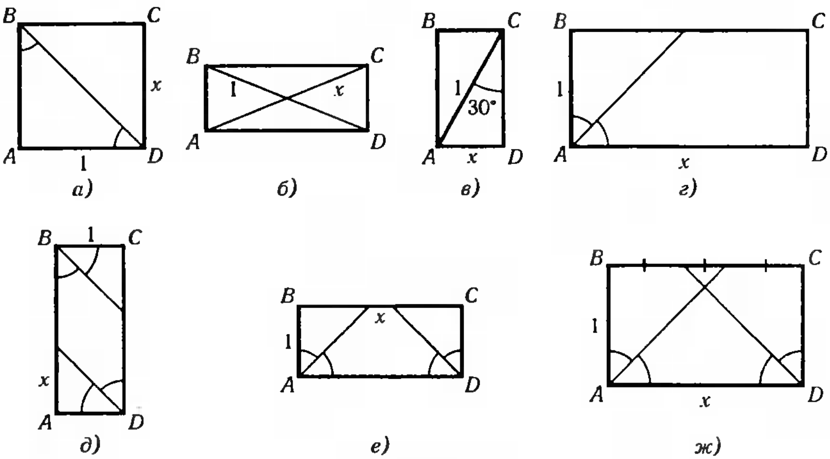


Рис. 373

9.60. Как найти периметр прямоугольника, если известны: а) длины перпендикуляра из его центра на стороны; б) периметр треугольника, отсеченного от прямоугольника его диагональю, и сама диагональ; в) периметры прямоугольников, полученных после того, как в данном прямоугольнике провели хорду, параллельную одной из сторон.

9.61. Из точки на гипотенузе прямоугольного треугольника провели перпендикуляры к его катетам. Известны периметры двух полученных при этом треугольников. Сможете ли вы найти периметр данного треугольника? Составьте и решите обратную задачу.

9.62. Равны ли прямоугольники, если равны их периметры?

9.63. В некотором прямоугольнике можно найти стороны, зная его периметр. Что это за прямоугольник?

9.64. В круге проведены два перпендикулярных диаметра. Из точки A на его окружности проведены перпендикуляры AB и AC на эти диаметры. Радиус круга равен 1. Сможете ли вы найти BC?

Ромб

А

9.65. Пусть a — сторона ромба, а P — его периметр. а) Запишите формулу для периметра ромба в зависимости от a. б) Запишите зависимость стороны a от P. в) Как называется каждая из этих зависимостей? г) Пусть $a = 59$ мм. Чему равен периметр ромба? д) Пусть a изменяется от 2 до 3 см. В каких границах лежит периметр ромба? е) Пусть периметр ромба равен 10 см и сосчитан с ошибкой, не большей, чем 1 см. Чему равна сторона a?

9.66. Нарисуйте ромб $ABCD$, в котором: а) AC больше BD; б) угол A больше угла C; в) диагонали равны; г) диагональ равна стороне.

9.67. Нарисуйте четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, но не ромб.

Б

9.68. Какой получится четырехугольник, если: а) от ромба отрезать параллелограмм; б) к ромбу приставить такой же ромб так, чтобы их равные стороны совпали?

9.69. Докажите, что: а) диагонали ромба делят его на четыре равных треугольника; б) все хорды ромба, параллельные его сторонам, равны. Какие следствия можно получить отсюда?

9.70. а) Докажите, что в ромбе перпендикуляры, проведенные из одной вершины на стороны, равны. б) Будет ли это верно в другом параллелограмме? в) Верно ли обратное а) утверждение?

9.71. На листе бумаги нарисовали угол, а затем вершину его оторвали. Сможете ли вы построить биссектрису этого угла?

9.72. Лист бумаги имеет форму ромба. Как из него склеить конверт?

В

9.73. Острый угол ромба равен 60°. Докажите, что одна из диагоналей делит его на два равносторонних треугольника.

9.74. Найдите углы ромба, если: а) его диагонали равны; б) диагональ равна стороне; в) диагональ составляет со стороной угол α.

9.75. Может ли диагональ ромба равняться: а) его стороне; б) половине его стороны; в) удвоенной стороне? В том случае, когда одна диагональ может удовлетворять поставленному условию, может ли и вторая удовлетворять ему же?

9.76. В некотором ромбе можно найти периметр, зная только одну его диагональ. Что это за ромб?

9.77. Равны ли ромбы, если равны их периметры?

9.78. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрису угла B, пересекающую в точке L сторону AD. После этого провели хорду LK, параллельную стороне. Есть ли на полученном рисунке ромб? Сколько их?

Квадрат

А

9.79. Про некоторый четырехугольник Вася сказал, что это — ромб, а Федя сказал, что это — прямоугольник. Могут ли быть правы оба?

9.80. Какими свойствами обладает квадрат?

Б

9.81. Вы находитесь в центре квадрата и хотите найти его периметр. Сколько построений или измерений вам для этого понадобится? Нельзя ли уменьшить их число?

9.82. С прямоугольным листом бумаги поступают так же, как в задаче **9.57**. Как сделать разрез сложенного вчетверо листа, чтобы полученное отверстие имело форму квадрата? А ромба? А прямоугольника?

9.83. Пусть в основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а ее боковые ребра равны. Такая пирамида называется правильной четырехугольной пирамидой. а) Докажите, что ее боковые грани равны между собой. б) Пусть точки K и L — середины ребер AB и AD. Докажите, что треугольник PKL — равнобедренный. в) Какую точку M на ребре PA вы можете указать, чтобы треугольник KLM был равнобедренным? г) Какую точку N на ребре PC вы можете указать, чтобы треугольник BDN был равнобедренным? д) Какие отрезки на ребрах DA, DC, DP отложить так, чтобы треугольник с вершинами в их концах был равнобедренным?

В

9.84. Равны ли квадраты, если равны их периметры?

Задачи к пункту 9.8

9.85. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Сколько параллелограммов можно будет насчитать на рисунке, если:

а) отложить равные отрезки AN и BM на сторонах AD и BC, а также равные отрезки AK и DL на сторонах AB и CD, после чего провести отрезки KL и MN;

б) отложить равные отрезки BK и DL на сторонах BC и AD, после чего каждую вершину параллелограмма соединить с точками K и L.

9.86. Восстановите параллелограмм, если на рисунке остались такие его элементы: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не лежащая на ней; г) три вершины; д) середины трех сторон.

9.87. Пусть отрезок AB движется параллельно самому себе, причем точка A все время находится на прямой a. По какой линии движется точка B?

9.88. Установите вид четырехугольника $KLMN$ на рис. 374.

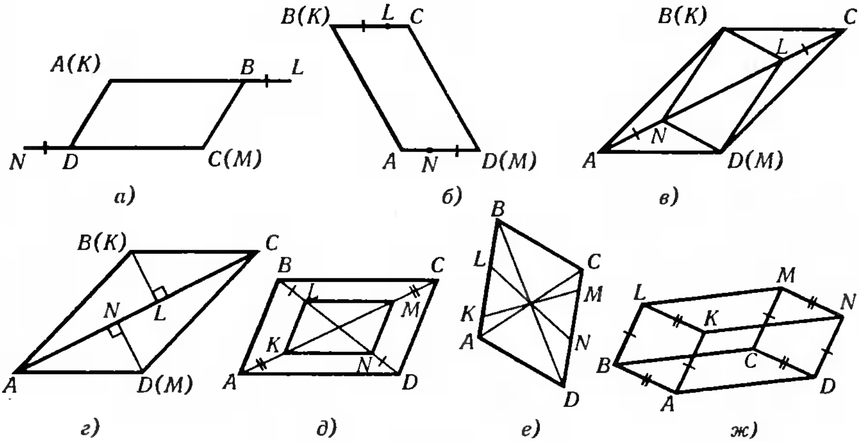


Рис. 374

9.89. На плоской поверхности установили два равных стержня. Каждый из них может вращаться вокруг точки закрепления. Можно ли их соединить так, чтобы эти стержни всегда были параллельны?

Задачи к пункту 9.9

А

9.90. На одном краю полосы взяли две точки и провели две хорды, параллельные между собой. Докажите, что: а) эти хорды равны; б) хорды, перпендикулярные краю полосы, равны между собой.

Б

9.91. Как вы истолкуете фразу: «Две улицы пересекаются под углом 60°»?

9.92. Как из бумажной полосы вырезать: а) прямоугольник; б) квадрат; в) равносторонний треугольник?

9.93. Как через точку внутри полосы провести прямую так, чтобы полученная при этом хорда: а) равнялась данному отрезку; б) делилась в этой точке пополам?

9.94. Используя только двустороннюю линейку: а) разделите угол пополам; б) разделите отрезок пополам; в) удвойте данный угол; г) удвойте данный отрезок; д) восставьте перпендикуляр в данной точке прямой; е) проведите прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку; ж) проведите перпендикуляр из данной точки на данную прямую? (В двусторонней линейке используются только ее края.)

9.95. На краях полосы возьмите две точки и перегните полосу по прямой, проходящей через эти точки. Какая получится фигура? Лучше всего, если вы изобразите ее, не рисуя исходной полосы.

В

9.96. Какой фигурой может быть: а) пересечение двух полос; б) объединение двух полос?

9.97. Представьте: а) параллелограмм как пересечение двух полос; б) треугольник как пересечение трех полос. Какие еще фигуры могут получиться в результате пересечения трех полос?

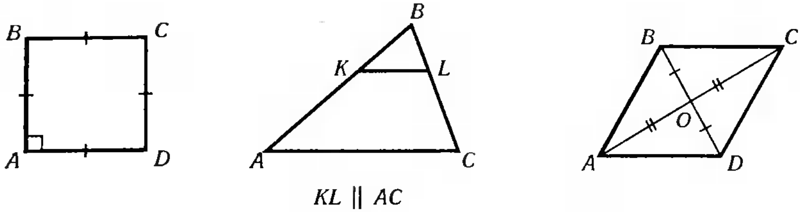
9.98. Если точка делит пополам какую-то хорду полосы, то она делит пополам любую хорду полосы, проходящую через данную точку. Докажите это.

9.99. Из двух точек одного края полосы провели две хорды, образующие с этим краем равные углы. Равны ли эти хорды?

Задачи к пунктам 9.10 и 9.11

А

9.100. На рис. 375 укажите лучи одного направления, противоположных направлений и разных направлений. На рис. 375,*в* укажите равные углы.



а) *б)* *в)*

Рис. 375

9.101. Нарисуйте луч. Отметьте какую-либо точку на плоскости. Проведите из нее луч: а) того же направления; б) противоположного направления; в) другого направления.

9.102. Нарисуйте фигуру, которую образуют лучи одного направления, отложенные от всех точек: а) отрезка, б) прямой.

9.103. Нарисуйте окружность, отметьте на ней точку и проведите из нее луч в направлении радиуса, проведенного в эту точку. Теперь отметьте точку, диаметрально противоположную взятой, и проведите из нее луч противоположного направления. Какую фигуру вы получите, если проделаете подобное со всеми точками окружности?

Б

9.104. а) Докажите, что углы, стороны которых соответственно противоположны, равны между собой. б) Как связаны между собой величины двух углов, у которых одна пара сторон направлена одинаково, а другая — противоположно?

9.105. Под каким углом к направлению на север движется яхта, если ее курс лежит на: а) юго-запад; б) северо-запад; в) северо-северо-запад; г) юго-юго-запад?

9.106. Азимут — это угол меджу направлением движения туриста и линией север — юг. Отсчитывается по часовой стрелке от 0 до 360°. а) Пусть туристы движутся по параллельным прямым и в одном направлении. Объясните, почему азимут их движения один и тот же. б) Пусть теперь они движутся по параллельным прямым и в противоположных направлениях. Какая связь есть между азимутами их движений?

9.107. Турист шел лесом, выдерживая некоторый азимут, затем прошел немного на север, а потом уже по другому азимуту, нежели вначале. Могут ли прямые, по которым он двигался в начале и конце движения, быть параллельными?

9.108. Если две материальные точки движутся в одном направлении, то их траектории параллельны или совпадают. Почему? Верно ли обратное?

9.109. Курс корабля — это то же, что и азимут для туриста. Пусть два корабля плывут параллельно прямой береговой линии в одном направлении. Отсюда следует, что они плывут одним курсом. Объясните это.

9.110. Объясните, почему движутся по параллельным прямым: а) корабли, плывущие одним курсом; б) туристы, идущие по одному азимуту. (При этом они не находятся на одной прямой.) в) Могут ли они двигаться по параллельным прямым, если их курсы (азимуты) различны?

9.111. Турист пошел лесом из дома по направлению к озеру, до которого 5 км. Он следовал по азимуту и сверялся с компасом каждые 15 мин, однако на озеро не попал. Почему?

9.112. Два туриста идут по одному и тому же азимуту из двух пунктов, находящихся на одном меридиане. Идут ли они параллельными маршрутами? А если пункты находятся на одной параллели?

9.113. Шхуна контрабандистов идет курсом N — N — O. Сторожевой катер мчится ей наперерез. Что это значит, по-вашему? Как это понятие связано с курсом корабля? Важно ли здесь, с какого борта катера находится шхуна?

9.114. Нарисуйте куб. Укажите на нем лучи одинаковых направлений, противоположных направлений, разных направлений.

В

9.115. Объясните, почему на прямой существует два направления. А сколько направлений существует на плоскости? На окружности? В пространстве? На сфере?

9.116. Какую фигуру образует на одной прямой: а) объединение двух лучей одного направления; б) пересечение двух лучей одного направления; в) объединение двух лучей противоположных направлений; г) пересечение двух лучей противоположных направлений?

9.117. Возьмите квадрат. В каком направлении идет его хорда наибольшей длины, выходящая из: а) вершины; б) середины стороны; в) точки на стороне? А в каком направлении идет из вершины хорда наименьшей длины? Решите аналогичную задачу для прямоугольника. Составьте аналогичную задачу для правильного треугольника, круга.

9.118. Из одной вершины прямоугольника в противоположную движется по двум взаимно перпендикулярным направлениям материальная точка. Каков ее наименьший и наибольший путь?

ЗАДАЧИ К § 10

Вопросы для самоконтроля

- Какие параллельные объекты в пространстве вы знаете?
- Можете ли вы привести примеры параллельных фигур в пространстве?
- Определения каких параллельных объектов в пространстве можете назвать?
- Какие признаки параллельности двух прямых в пространстве вы знаете?
- Какие признаки параллельности фигур в пространстве вам известны?
- Какие признаки перпендикулярности прямой и плоскости можете перечислить?
- Какие плоскости называют перпендикулярными? Приведите примеры таких плоскостей.
- Какие свойства параллельных фигур в пространстве вам известны?
- Можете ли вы привести примеры аналогичных утверждений о параллельных фигурах на плоскости и в пространстве?

Задачи к пункту 10.1

А

10.1. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите его ребра, параллельные: а) AD; б) C_1D_1; в) CD; г) BB_1.

10.2. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как вы думаете, будут ли параллельны прямые: а) AD и BB_1; б) AD и C_1D_1; в) AD и A_1C_1; г) AC и B_1D_1; д) A_1C и C_1D?

Б

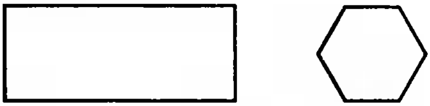
10.3. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте теперь отрезки BD и B_1D_1. Известно, что они параллельны. а) Нарисуйте другие отрезки на поверхности параллелепипеда, параллельные BD. Какую фигуру заполняют все такие отрезки? б) Какой отрезок равен и параллелен отрезку C_1D и проходит через точку A? в) Нарисуйте отрезок, параллельный AD_1 и проходящий в задней грани. г) Нарисуйте отрезок, параллельный C_1D и проходящий через точку K — середину отрезка AD. д) Какую фигуру образуют все такие отрезки, если точка будет двигаться по ребру AD от A к D?

10.4. а) Нарисуйте отрезок AB. Пусть отрезок AC не лежит на прямой AB. Из каждой точки отрезка AB проведите в одну сторону от AB отрезки, равные и параллельные AC. Какая при этом получится фигура? Каким еще аналогичным способом можно получить ту же фигуру?

б) Нарисуйте куб. Можно считать, что он получен так. Взяли квадрат $ABCD$ и из каждой его точки провели отрезок, равный и параллельный AA_1, в одну сторону от основания. Все проведенные отрезки и заполнят куб. Каким еще аналогичным способом можно получить этот же куб?

10.5. Нарисуйте фигуры, которые получаются, если действовать способом, указанным в задаче **10.4,б)**: а) с кругом, б) с треугольником. Если вы сделали верные рисунки, то перед вами окажутся цилиндр и треугольная призма.

10.6. Поставим куб на край стола так, чтобы его ребро совместилось с краем. Если осветить его пучком света, параллельным другому его ребру, лежащему на столе, то на стене за столом мы увидим тень в форме квадрата. Как поставить куб на столе, чтобы его тень на стене была такой, как на рис. 376?



а) *б)*

Рис. 376

10.7. Пусть параллельным пучком света освещаются: а) параллельные прямые; б) пересекающиеся прямые; в) скрещивающиеся прямые. Какой, по-вашему, будет тень от них? Для ответа на этот вопрос проведите дома соответствующий опыт.

В

10.8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — центр грани AA_1B_1B (точка пересечения ее диагоналей), точка L — центр грани CDD_1C_1. а) Докажите, что KL параллелен AD. Каким еще ребрам параллелепипеда параллелен отрезок KL? б) Нарисуйте отрезок, параллельный AA_1. Каким ребрам параллелепипеда он параллелен? в) Нарисуйте отрезок, параллельный AB. Каким ребрам он будет параллелен? г) Как вы думаете, пересекаются ли все проведенные вами отрезки?

10.9. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте теперь отрезок, равный и параллельный: а) A_1D и проходящий через точку D_1; б) A_1D и проходящий через точку A; в) CD_1 и проходящий через точку D; г) CD_1 и проходящий через точку C; д) A_1D и проходящий через точку C_1; е) A_1D и проходящий через точку B.

10.10. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть точка X движется по поверхности куба, траекторией ее движения является отрезок, параллельный AC. Какую фигуру заполнят все такие отрезки, когда X движется по: а) DA; б) AA_1; в) A_1B_1; г) B_1D_1; д) AB_1; е) A_1C?

Задачи к пункту 10.2

А

10.11. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какой его грани перпендикулярно ребро: а) CC_1; б) DC; в) A_1D_1?

10.12. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед. Какому ребру перпендикулярна его грань: а) верхняя; б) правая; в) передняя?

10.13. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Объясните, почему AA_1 перпендикулярна AC. б) А почему CC_1 перпендикулярна A_1C_1? в) Нарисуйте диагональ куба, перпендикулярную BB_1. г) То же задание для BC. д) То же задание для CD.

10.14. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его поверхности нарисуйте несколько отрезков, выходящих из точки D и перпендикулярных: а) AD; б) CD; в) DD_1.

Б

10.15. На рис. 377 $PABC$ — правильная треугольная пирамида. Пусть PQ — перпендикуляр из точки P на основание ABC пирамиды. Докажите, что точка Q является центром треугольника ABC, т. е. $QA = QB = QC$.

10.16. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из его вершин на противоположные грани, равны между собой.

10.17. На рис. 378 изображены некоторые части куба. Для каждого многогранника нарисуйте его вид со стороны каждой грани этого куба в таком порядке: спереди, сверху, слева, сзади, снизу, справа.

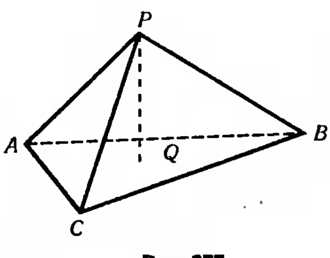
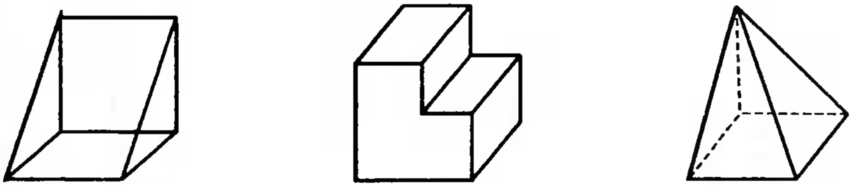


Рис. 377

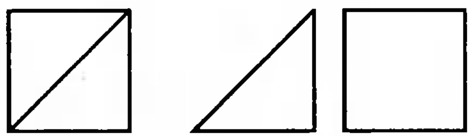
10.18. Перед вами на рис. 379,*а* вид спереди некоторого многогранника, который является частью куба. Нарисуйте эту часть и другие ее виды.

10.19. Перед вами на рис. 379,*б* вид спереди и сверху некоторого много-



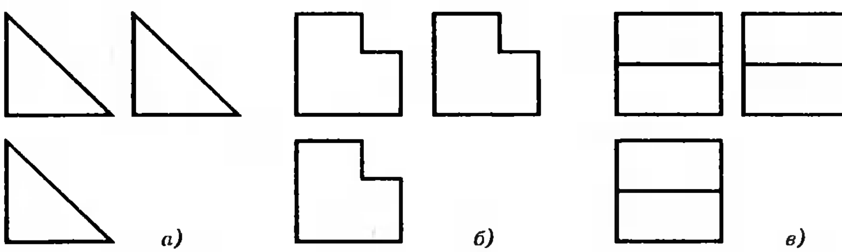
а) б) в)

Рис. 378



а) б)

Рис. 379



а) б) в)

Рис. 380

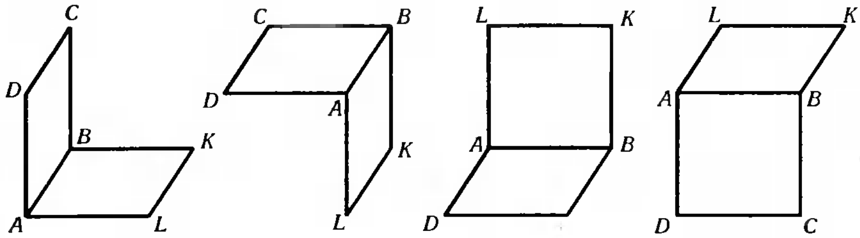
гранника, который является частью куба. Нарисуйте его вид слева. Пусть теперь указанные два вида — виды спереди и слева. Нарисуйте его вид сверху.

10.20. Может ли многогранник, являющийся частью куба, выглядеть на трех видах — спереди, сверху и слева — таким образом, как на рис. 380?

10.21. Предложите способ для установки вертикальной мачты на земле.

В

10.22. Точка O лежит в некоторой плоскости и перпендикуляр AO к этой плоскости попадает как раз в эту точку. Его продлили по другую сторону от плоскости на отрезок $OB = AO$. Возьмем на нашей плоско-



ABCD и ABKL — грани куба

а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 381

сти любую точку X. а) Докажите, что $XA = XB$. б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

10.23. Из точки A на плоскость проведен перпендикуляр AO. а) Пусть точка O является центром окружности, лежащей на данной плоскости. Возьмем точку X на этой окружности. Докажите, что расстояние AX не меняется при движении точки по окружности. б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

10.24. Найдите на рис. 381 прямую, перпендикулярную плоскости.

10.25. В тетраэдре $PABC$ ребро PB перпендикулярно основанию ABC. Кроме того, в нем $PB = AB = BC$. а) Докажите, что $PA = PC$. б) Верно ли обратное утверждение? Все ли условия задачи нужны для доказательства обратного утверждения?

3.26. На рис. 382 $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. а) Докажите, что PQ — перпендикуляр к основанию $ABCD$. б) Нарисуйте отрезки на поверхности пирамиды, которые перпендикулярны PQ. в) Нарисуйте прямую AX, перпендикулярную основанию. г) Докажите, что AC перпендикулярно плоскости BPD. д) Найдите на этом рисунке прямую, перпендикулярную плоскости APC.

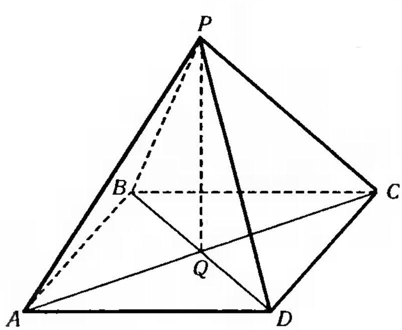


Рис. 382

10.27. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABC$. а) Пусть точка K — середина ребра PB. Докажите, что PB перпендикулярно сечению AKC. б) Нарисуйте сечение этого тетраэдра, перпендикулярное ребру AC. в) Видите ли вы на этом рисунке отрезок, который перпендикулярен ребрам AC и PB? г) А теперь попробуйте нарисовать отрезок в этом тетраэдре, который перпендикулярен ребрам AP и CB.

10.28. В тетраэдре $PABC$ ребро PA перпендикулярно ребрам PB и PC. Кроме того, $PA = PB = PC$.

а) Докажите, что ребро PB перпендикулярно грани APC.

б) Какие еще ребра этого тетраэдра перпендикулярны его граням?

в) Нарисуйте такие отрезки на поверхности этого тетраэдра, которые перпендикулярны граням ABP, CPB.

г) Отметьте точку X на ребре PB и нарисуйте сечение этого тетраэдра, которое перпендикулярно PB. Какую оно имеет форму?

д) Нарисуйте сечение этого тетраэдра, которое перпендикулярно AP.

е) Сечение, которое вы нарисовали в пункте д), пересекает ребро AC в какой-то точке. Нарисуйте теперь сечение, проходящее через эту точку и перпендикулярное PC.

10.29. Сможете ли вы объяснить, почему параллельны ребра прямоугольного параллелепипеда, которые расположены между верхним и нижним его основанием?

10.30. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка X движется по его поверхности. И каждый раз проводится отрезок XX_1, равный ребру куба и лежащий на нем. Нарисуйте фигуру, получающуюся при этом, если переменный отрезок перпендикулярен грани $ABCD$, а точка X прошла по: а) AD; б) ломаной ABC; в) BD; г) всему треугольнику $D_1C_1B_1$.

Задачи о перпендикулярных плоскостях

А

10.31. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите его грани, перпендикулярные а) верхней грани; б) левой грани; в) правой грани. г) Теперь попробуйте, не глядя на рисунок, назвать грань, перпендикулярную передней грани. Проверьте себя, поглядев на рисунок. Теперь попробуйте, опять же не глядя на рисунок, назвать еще одну грань, перпендикулярную передней грани. д) А сколько всего в прямоугольном параллелепипеде пар взаимно перпендикулярных граней?

10.32. На рис. 383 перед вами два квадрата, расположенные в пространстве так, что AD_1 перпендикулярно AD. б) Объясните, почему эти квадраты перпендикулярны между собой. б) Нарисуйте отрезок AC. Оказывается, что треугольник D_1AC перпендикулярен квадрату $ABCD$. Откуда это следует? в) Какой еще треугольник с вершинами в данных точках перпендикулярен квадрату $ABCD$? г) А есть ли треугольники, перпендикулярные другому из данных квадратов?

10.33. Нарисуйте треугольную пирамиду $PABC$, в которой PB перпендикулярно AB, PB перпендикулярно BC, AB перпендикулярно BC.

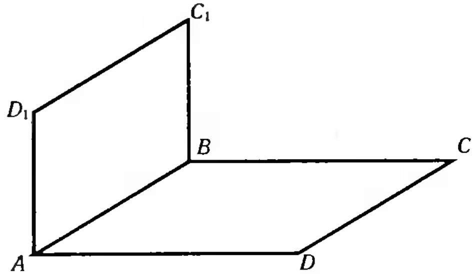


Рис. 383

(Такую пирамиду можно увидеть, глядя на верхний угол комнаты, в которой вы находитесь.) Запишите все пары перпендикулярных между собой граней в этой пирамиде.

Б

10.34. Последите за переплетом книги, когда вы ее открываете. Когда его края будут перпендикулярны между собой, тогда будут перпендикулярны и сами корочки переплета. Можете ли вы объяснить, почему так получается?

10.35. Перпендикулярность двух плоских поверхностей проверяют с помощью плотницкого угольника. Можете ли вы объяснить, как это делают и на чем основана такая проверка?

10.36. Пусть мы делим торт двумя вертикальными разрезами на четыре куска. При этом мы увидим, что полученный в результате разреза угол в каждом из этих кусков прямой. Попытайтесь дать этому объяснение.

В

10.37. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначьте его сечение AA_1C_1C. Какая грань куба перпендикулярна этому сечению?

10.38. Пусть ABC и ABC_1 — два равносторонних треугольника, точка K — середина AB. При этом C_1K перпендикулярно KC. а) Объясните, почему эти треугольники перпендикулярны между собой. б) Проведите отрезок CC_1 и найдите на полученном рисунке другие пары взаимно перпендикулярных треугольников.

10.39. Нарисуйте куб и несколько его сечений, перпендикулярных: а) нижней грани; б) передней грани; в) правой грани.

10.40. Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$. а) Докажите, что ее сечение PBD перпендикулярно основанию $ABCD$. б) Нарисуйте еще одно сечение, перпендикулярное основанию. в) Докажите, что сечения PAC и PBD взаимно перпендикулярны.

10.41. Верны ли, по вашему мнению, такие утверждения: а) Если две плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны между собой любые две пересекающиеся прямые, одна из которых лежит в первой плоскости, а другая — во второй. б) Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их общей прямой, будет перпендикулярна другой плоскости. в) Если две прямые перпендикулярны, то они лежат в двух перпендикулярных между собой плоскостях. г) Если две плоскости перпендикулярны, то найдется прямая, которая перпендикулярна каждой из них.

Задачи к пункту 10.4

А

10.42. Укажите пары параллельных между собой плоскостей в прямоугольном параллелепипеде.

10.43. Какую плоскость называют горизонтальной? А вертикальной?

Б

10.44. Кубик поставили на стол. Сверху на него поставили другой кубик. Объясните, почему верхняя грань полученного многогранника горизонтальна.

10.45. Один спичечный коробок поставили на другой. а) Докажите, что в полученном многограннике найдется пара параллельных граней. б) Сколько вообще может оказаться таких пар?

10.46. Как на вертикальном столбе установить горизонтальную площадку? Как вы можете получить два параллельных распила деревянного бруса прямоугольного сечения?

10.47. Объясните, почему часовая и минутная стрелки движутся в параллельных плоскостях?

10.48. Корешок книги поставили на стол. Объясните, почему верхние края книги лежат в горизонтальной плоскости.

10.49. Возьмите два одинаковых конверта. Как вы их расположите, чтобы их длинные стороны лежали в параллельных плоскостях. (При этом сами конверты не лежат в этих плоскостях.)

10.50. На рис. 384 $KLMN$ — сечение куба плоскостью, проходящей через середины соответствующих ребер куба. а) Докажите, что оно параллельно передней грани куба. б) Какой еще грани куба оно

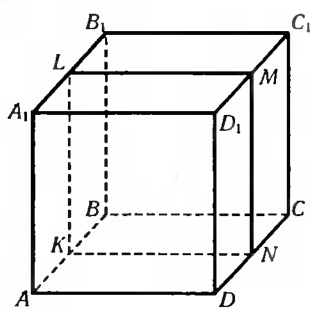


Рис. 384

параллельно? в) Нарисуйте другое сечение куба, параллельное этим же граням. г) Нарисуйте сечение, параллельное левой грани куба. е) На сколько частей делят куб два сечения, одно из которых параллельно левой грани? ж) Если к этим сечениям добавить сечение, параллельное передней грани, то на сколько частей будет разделен куб?

10.51. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABC$. Отметьте в нем точку K — середину ребра PA, точку L — середину ребра PB, точку M — середину ребра PC. Известно, что треугольник KLM параллелен нижней грани тетраэдра. а) Нарисуйте другие его сечения, также параллельные нижней грани. б) Нарисуйте сечение, проходящее через точку K и параллельное правой грани. в) Нарисуйте сечение, проходящее через точку K и параллельное левой грани. г) Нарисуйте сечение, проходящее через M и параллельное задней грани. д) На сколько частей разделится тетраэдр сечением KLM и теми, которые указаны в пунктах б) и в)?

10.52. Пусть мы рассматриваем ортогональную проекцию прямоугольного параллелепипеда на плоскость, параллельную одной из его граней. При этом другие его грани будут изображаться на этой плоскости параллельными отрезками. Можете ли вы объяснить, почему так бывает?

В

10.53. а) На сколько частей делят пространство две параллельные плоскости? б) А три? в) На сколько частей могут делить пространство три плоскости? г) На сколько частей делят пространство плоскости всех граней прямоугольного параллелепипеда?

10.54. Верны ли, по вашему мнению, такие утверждения: а) Если одна из двух параллельных плоскостей пересекает третью плоскость, то и вторая тоже ее пересекает. б) Если две плоскости вертикальны, то они параллельны. в) Плоскость, параллельная вертикальной плоскости, сама вертикальна. г) Если плоскости параллельны и одна из них перпендикулярна некоторой прямой, то и другая перпендикулярна той же прямой. д) Если две плоскости параллельны, то любые две прямые, лежащие в двух этих плоскостях, также параллельны. е) Если две прямые параллельны, то они лежат в двух плоскостях, параллельных между собой.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Александр Данилович АЛЕКСАНДРОВ
Алексей Леонидович ВЕРНЕР
Валерий Идельевич РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7 класса средней школы

Ответственный редактор *Шакиров В. Н.*
Художественный редактор *Андреева В. А.*
Технический редактор *Раснюк С. И.*
Корректор *Соколова И. Н.*
Компьютерная верстка *Тимохин В. В., Яшенкова Е. Л.*

Лицензия № 071099 от 09.11.97. Подписано в печать с готовых диапозитивов 22.01.98. Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Гарнитура Антиква. Уч.-изд. л. 14,3. Усл. печ. л. 15. Тираж 15 000 экз. Заказ 12.

Издательство «Специальная Литература» при участии ТОО «Мифрил». 198052, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

ОАО «Санкт-Петербургская типография № 6». 193144, Санкт-Петербург, ул. Моисеенко, д. 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛР № 070869 от 16.02.93.

Н/К

Изд. № Ф30(03). Подписано в печать 17.05.94.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Объем 12,5 печ.л. Тираж 30 000 экз.
Заказ 137 Цена договорная

Московский институт развития образовательных систем
109004 Москва, Нижняя Радищевская ул., д. 10

АО „Чертановская типография"
113545, Москва, Варшавское шоссе, 129а